Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

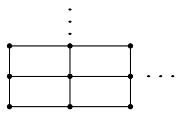
3. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 6. 5., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

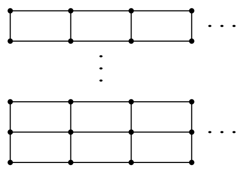
Wir betrachten die folgenden Varianten des Schokoladenspiels (vgl. Übung 2, Aufgabe 2) bei denen wir jeweils die Form der Schokoladentafel, nicht aber die übrigen Spielregeln anpassen, d.h. wiederum wählen die Spieler abwechselnd ein Schokoladenstück aus und entfernen alle Schokoladenstücke rechts oberhalb dieses Stücks. Der Spieler, der das letzte Stück nehmen muss, verliert. Welcher Spieler gewinnt jeweils die folgenden Varianten des Schokoladenspiels?

(a) Für das $(\omega \times \omega)$-Schokoladenspiel betrachten wir eine “quadratische“ Schokoladentafel, die sowohl nach oben als auch nach rechts unendlich ist. Formal können die Zugmöglichkeiten repräsentiert werden durch das Gitter $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.



Hinweis: Geben Sie eine explizite Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

(b) Für $n \geq 1$ betrachten wir das $(n \times \omega)$-Schokoladenspiel bei dem die beiden Spieler abwechselnd Stücke einer ”rechteckigen“ Schokoladentafel wählen, die n Zeilen und unendlich viele Spalten besitzt. Entsprechend kodieren wir die Zugmöglichkeiten durch das Gitter $\{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.



Hinweis: Der Fall $n = 2$ ist für die Lösung von zentraler Bedeutung.

Aufgabe 2

(a) Sei $\mathcal{G}$ ein Paritätsspiel mit Gewinnregionen W_0 und W_1 und f eine positionale Strategie für Spieler 0. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Wenn f eine Gewinnstrategie für Spieler 0 auf W_0 ist, so gilt $f(V_0 \cap W_0) \subseteq W_0$.

(ii) Wenn $f(V_0 \cap W_0) \subseteq W_0$ gilt, so ist f eine Gewinnstrategie für Spieler 0 auf W_0.

(b) Sei $\mathcal{G}_T = (V, V_0, V_1, E, T)$ ein Spielgraph ohne Terminalknoten, d.h. es gilt $vE \neq \emptyset$ für alle $v \in V$, expandiert um eine einstellige Relation T

   (i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Attr}_\sigma(T)$ eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist, falls T bereits eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist.

   (ii) Zeigen Sie, dass T genau dann eine Falle für Spieler σ ist, wenn $T = V - \mathrm{Attr}_\sigma(V - T)$.

Aufgabe 3

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ heißt *schwach*, wenn entlang jeder Kante $(v, w) \in E$ gilt: $\Omega(v) \leq \Omega(w)$.

(a) Sei $m = \max(\Omega(V))$ und $V_m = \{v \in V : \Omega(v) = m\}$ die Menge der Spielpositionen von maximaler Priorität. Beweisen Sie, dass in einem schwachen Paritätsspiel die Menge $\mathrm{Attr}_\sigma(V_m)$ eine Falle für Spieler $1 - \sigma$ ist. Gilt dies auch für allgemeine Paritätsspiele?

(b) Geben Sie ein Polynomialzeitalgorithmus an, um die Gewinnmengen in solchen Spielen zu bestimmen.