Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

4. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 13. 5., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Eine Gewinnbedingung $W \subseteq V^\omega$ heißt präfixunabhängig, wenn $x\alpha \in W \Leftrightarrow \alpha \in W$ für jedes $x \in V^*$ und $\alpha \in V^\omega$. Offensichtlich ist jede Paritätsbedingung präfixunabhängig.

(a) Zeigen Sie: Für jedes Spiel G über der Arena $G = (V, V_0, V_1, E)$ mit einer präfixunabhängigen Gewinnbedingung W ist die Gewinnregion W_0 von Spieler 0 ein Fixpunkt des Operators

$$F_\psi : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V) : X \mapsto \{v \in V : G, v \models \psi(X)\}$$

für die Formel $\psi(X) := (V_0 \wedge \Diamond X) \vee (V_1 \wedge \Box X) \in L_\mu$.

(b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen an, so dass auf Paritätsspielen $W_0 = \mathrm{lfp}(F_\psi)$ bzw. $W_0 = \mathrm{gfp}(F_\psi)$ gilt.

Aufgabe 2

Ein sequenzielles Erreichbarkeitsspiel ist ein Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F_0, F_1)$, mit $F_0, F_1 \subseteq V$ und $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Eine Partie $\rho = v_0 v_1 v_2 \ldots$ wird von Spieler 0 genau dann gewonnen, falls $i < j$ existieren mit $v_i \in F_0$ und $v_j \in F_1$. Jede andere Partie wird von Spieler 1 gewonnen. Ziel von Spieler 0 ist es also nacheinander einen Knoten $v \in F_0$ und einen Knoten $w \in F_1$ zu besuchen. Zusätzlich nehmen wir an, dass für alle $v \in V$ gilt $vE \neq \emptyset$.

(a) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x)$ an, welche die Gewinnregion von Spieler 0 beschreibt, d.h. füür alle sequenziellen Erreichbarkeitsspiele $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F_0, F_1)$ und alle $v \in V$ gilt $\mathcal{G}, v \models \varphi$ genau dann, wenn Spieler 0 eine Gewinnstrategie von v aus besitzt.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie für $\sigma \in \{0, 1\}$, dass Spieler σ in jedem sequenziellen Erreichbarkeitsspiel eine *positionale* Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe 3

Geben Sie L_μ-Formeln an, welche besagen, dass

(a) es einen Pfad gibt, auf dem irgendwann nur noch Zustände aus P vorkommen;

(b) auf allen Pfaden immer wieder ein Zustand aus P vorkommt;

(c) auf allen Pfaden, immer wenn ein Zustand aus P auftaucht, es von diesem Zustand aus einen Pfad zu einem Zustand aus Q gibt.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel. Eine positionale Strategie σ nennen wir *homogen*, wenn sie für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge den gleichen Nachfolger auswählt, d. h. falls

$$uE = vE \implies \sigma(u) = \sigma(v)$$

gilt. (Beachten Sie, dass $\Omega(u) \neq \Omega(v)$ möglich ist.)

Zeigen Sie, dass Paritätsspiele homogen positional determiniert sind, dass es also positionale homogene Strategien σ_0 (für Spieler 0) und σ_1 (für Spieler 1) gibt, so dass σ_i von allen Knoten in der Gewinnregion W_i von Spieler i eine Gewinnstrategie ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zu $\mathcal{G}$ in geeigneter Weise ein neues Paritätsspiel und verwenden Sie anschließend den Satz über die positionale Determiniertheit von Paritätsspielen.