Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

5. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 27. 5., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega\colon V \to \mathbb{N})$ ist ein *Solitärspiel*, wenn maximal ein Spieler nicht triviale Züge machen kann, d.h. wenn ein $\sigma \in \{0,1\}$ existiert, so dass $|vE| \leq 1$ gilt für alle $v \in V_\sigma$.

Ein Paritätsspiel $\mathcal{G}$ heißt *verschachteltes Solitärspiel*, wenn für jede starke Zusammenhangskomponente $C \subseteq V$ in (V, E) gilt, dass das von C induzierte Teilspiel $\mathcal{G}[C]$ ein Solitärspiel ist. Beachten Sie, dass in einem verschachtelten Solitärspiel beide Spieler nicht-triviale Züge machen können.

Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der die Gewinnregionen der beiden Spieler in einem verschachtelten Solitärspiel berechnet.

Aufgabe 2

Eine LFP-Formel φ heißt *abgeschlossen*, wenn keine Fixpunktvariable frei in φ vorkommt.

Das *Solitärfragment* Sol-LFP von LFP erhalten wir, indem wir die Formelbildungsregeln für die universelle Quantifizierung, die Konjunktion und die Negation wie folgt einschränken:

- Ist φ eine *abgeschlossene* Formel in Sol-LFP, so ist auch $\forall y \varphi$ in Sol-LFP.
- Ist φ eine *abgeschlossene* Formel in Sol-LFP, so ist auch $\neg\varphi$ in Sol-LFP.
- Ist φ eine *abgeschlossene* Formel in Sol-LFP und ψ eine beliebige Formel in Sol-LFP, so ist auch $\varphi \wedge \psi$ eine Formel in Sol-LFP.

Sei $k \geq 1$. Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus an, der das Modelchecking-Problem für Formeln in Sol-LFP der Weite $\leq k$ entscheidet.

Hinweis: Argumentieren Sie, dass das LFP-Modelcheckingspiel für Formeln in Sol-LFP ein verschachteltes Solitärspiel ist und verwenden Sie Aufgabe 1. Beachten Sie, dass für Formeln in Sol-LFP im Allgemeinen keine äquivalente Formel in Negationsnormalform in Sol-LFP exisitiert. Passen Sie daher zunächst das LFP-Modelcheckingspiel für Formeln die nicht in Negationsnormalform vorliegen geeignet an.

Aufgabe 3

Zu einem unendlichen Wort $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots \in \{a,b\}^\omega$ definieren wir die Kripkestruktur $\mathfrak{K}_\alpha = (\mathbb{N}, E_a, E_b)$ mit

$$E_x := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}, \alpha(n) = x\}$$

für $x \in \{a,b\}$. Seien nun $\varphi_1 = \nu X.\mu Y.([a]X \wedge [b]Y)$ und $\varphi_2 = \mu Y.\nu X.([a]X \wedge [b]Y)$.

(a) Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Sprachen $L_i = \{\alpha \in \{a,b\}^\omega : \mathfrak{K}_\alpha, 0 \models \varphi_i\}$.

Hinweis: Betrachten Sie das Modelcheckingspiel $\mathcal{G}(\mathfrak{K}_\alpha, \varphi_i)$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$ über allen Kripkestrukturen?