**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

# 6. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 3. 6., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

## Aufgabe 1

(a) Geben Sie für die folgende Mengen $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ jeweils die kleinste Stufe $\Sigma^0_\alpha$ bzw. $\Pi^0_\alpha$ der Borel-Hierarchie an, die $X$ enthält. Zeigen oder wiederlegen sie jeweils, dass $X$ vollständig für die entsprechende Stufe ist.

   (i) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält beliebig lange Infixe } 10^n1\}$;

   (ii) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält das Infix } 00\text{, aber nicht das Infix } 11\}$;

   (iii) $X = \{v(w)^\omega : v \in \{0,1\}^*, w \in \{0,1\}^+\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stufe $\Sigma^0_\alpha$ bzw. $\Pi^0_\alpha$ der Borel-Hierarchie unter endlicher Vereinigung und endlichem Schnitt abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}$ gilt für alle $\alpha \geq 1$.

## Aufgabe 2

Zu einer Sprache $W \subseteq A^*$ von endlichen Wörtern definieren wir die folgende Sprache $\lim W \subseteq A^\omega$ von unendlichen Wörtern:

$$\lim W = \{x \in A^\omega : \text{ex. unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_0 \dots x_n \in W\}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $L \subseteq A^\omega$ gilt: $L \in \Pi^0_2 \iff L = \lim W$ für ein $W \subseteq A^*$.

## Aufgabe 3

Eine Funktion $f : B^\omega \to C^\omega$ ist *stetig*, wenn $f^{-1}(Z)$ offen ist für jede offene Menge $Z \subseteq C^\omega$. Wir sagen $X \subseteq B^\omega$ ist *Wadge reduzierbar* auf $Y \subseteq C^\omega$, $X \leq Y$, falls es eine stetige Funktion $f : B^\omega \to C^\omega$ gibt mit $f^{-1}(Y) = X$.

Beweisen Sie, dass die Relation $\leq$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) $X \leq Y$ und $Y \leq Z$ impliziert $X \leq Z$;

(b) $X \leq Y$ impliziert $B^\omega \setminus X \leq C^\omega \setminus Y$.