Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W. Pakusa

SS 2013

7. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 10. 6., um 13:30 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Seien $X \subseteq A^\omega$ und $Y \subseteq B^\omega$ Borel-Mengen. Wir sagen, dass X und Y *unvergleichbar* sind, wenn weder $X \leq Y$ noch $Y \leq X$ gilt. Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe von Wadge-Spielen:

(a) Zeigen Sie, dass keine drei Borel-Mengen unvergleichbar sind. Beweisen Sie dazu, dass falls X und Y unvergleichbar sind, so gilt $X \leq B^\omega \setminus Y$ und $B^\omega \setminus Y \leq X$.

(b) Überprüfen Sie für $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, ob $X_i \leq X_j$ gilt.

   (i) $X_0 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{wenn } x \text{ das Infix } 01^n0 \text{ enthält, dann ist } n \text{ eine Primzahl}\}$

   (ii) $X_1 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{es gibt Turingmaschine } M \text{ mit } x[n] = 1 \text{ gdw. } M \text{ akzeptiert } 1^n\}$

   (iii) $X_2 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{kommt in } x \text{ das Infix 00 unendlich oft vor, dann auch das Infix 11}\}$.

Aufgabe 2

(a) Sei $B = \{0, 1\}$. Eine Funktion $f\colon B^\omega \to B^\omega$ heißt *Turing-berechenbar*, wenn es eine 3-Band Turingmaschine gibt, mit einem Eingabeband (nur lesend), einem Arbeitsband (lesend und schreibend) und einem Ausgabeband (nur schreibend), so dass wenn zu Beginn einer Berechnung die Eingabe $\alpha \in \{0,1\}^\omega$ auf dem Eingabeband steht, für die Berechnung der Turingmaschine auf α gilt:

- die Berechnung ist nicht-terminierend, und
- auf dem Ausgabeband, das zu Beginn leer ist, befindet sich nach ω Schritten die Ausgabe $f(\alpha) \in B^\omega$.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion stetig ist.

(b) Seien B und C zwei Alphabete und sei $p\colon B \to C$ eine Abbildung. Die durch p *induzierte Projektion* $f_p : B^\omega \to C^\omega$ ist für $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \cdots \in B^\omega$ definiert durch

$$f_p(\alpha) = p(\alpha_0)p(\alpha_1)p(\alpha_2) \cdots \in C^\omega.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede solche Projektion stetig ist.

Aufgabe 3

Ein *Banach-Mazur-Spiel* (über $\{0,1\}$) ist ein unendliches Spiel, in dem die beiden Spieler abwechselnd nicht-leere Worte $x_i, y_i \in \{0,1\}^+$ wählen. Spieler 0, der das Spiel beginnt, gewinnt das Spiel, wenn die Konkatenation $\alpha = x_0 y_0 x_1 y_1 \dots$ der gezogenen Wörter in der Gewinnmenge $W \subseteq \{0,1\}^\omega$ liegt.

(a) Ein *Flipset* $\mathcal{F} \subseteq \{0,1\}^\omega$ ist eine Menge von ω-Wörtern, so dass für alle $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\omega$, die sich an genau einer Position unterscheiden, gilt: $\alpha \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn $\beta \notin \mathcal{F}$.

Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik, dass ein Flipset existiert.

Hinweis: Verwenden Sie für alle $\alpha \in \{0,1\}^\omega$ eine Aussagenvariable X_α.

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Flipset. Zeigen Sie, dass das Banach-Mazur-Spiel mit Gewinnbedingung $\mathcal{F}$ nicht determiniert ist.

(c) Verwenden Sie (b) um einen weiteren Beweis dafür zu erhalten, dass Gale-Stewart-Spiele über $\{0,1\}$ im Allgemeinen nicht determiniert sind.

Sei dazu $W \subseteq \{0,1\}^\omega$ eine Gewinnbedingung für das Banach-Mazur-Spiel, so dass dieses nicht determiniert ist.

Konstruieren Sie aus W eine Gewinnbedingung $W' \subseteq \{0,1\}^\omega$, so dass das Gale-Stewart-Spiel über $\{0,1\}$ mit Gewinnbedingung W' nicht determiniert ist.

Hinweis: Kodieren Sie einen Zug $x \in \{0,1\}^+$ im Banach-Mazur Spiel durch mehrere Züge von Symbolen $x_i \in B$ im Gale-Stewart Spiel.