Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W.Pakusa

SS 2013

8. Übung Logik und Spiele

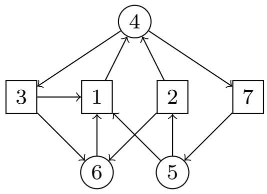
Abgabe: bis Montag, den 17. 6. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Betrachten Sie den unten dargestellten Spielgraphen mit der Muller-Bedingung

$$\mathcal{F}_0 = \{\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

und Anfangsposition 4. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler 0 mit der minimalen Anzahl von Speicherzuständen an und beweisen Sie die Minimalität.



Aufgabe 2

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ein Muller-Spiel mit $\Omega : V \to \mathbb{N}$. Wir nennen $\mathcal{G}$ ein (infinitäres) Paritätsspiel, wenn

$$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq \mathbb{N} : \min(X) \text{ ist gerade}\} \cup \{\emptyset\}$$

und wir nennen $\mathcal{F}_0$ einen *Abwärtskegel*, wenn eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathcal{F}_0 = \{X \ : \ X \subseteq A\}.$$

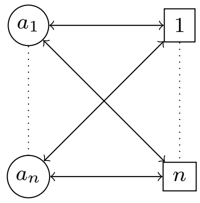
Ein *1-Registerspeicher* ist eine Speicherstruktur $(M, \text{update}, \text{init})$ mit $M = \mathbb{N}$ und $\text{update}(m, v) \in \{m, \Omega(v)\}$ für alle m,v.

(a) Geben Sie ein Muller-Spiel mit einem Abwärtskegel als Gewinnbedingung an, das von Spieler 0 gewonnen wird, dieser Spieler aber keine Gewinnstrategie mit endlichem Speicher hat.

(b) Reduzieren Sie mit einem 1-Registerspeicher Muller-Spiele mit Abwärtskegeln als Gewinnbedingung auf Paritätsspiele.

Aufgabe 3

Betrachten Sie für jedes $n > 1$ das Spiel DJW_n auf folgendem Spielgraph



in dem Spieler 0, der an runden Knoten den Zug hat, dann gewinnt, wenn die größte unendlich oft besuchte Zahl l auf der rechten Seite genau der Anzahl der unendlich oft besuchten Knoten auf der linken Seite entspricht.

(a) Zeigen Sie, dass in diesen Spielen Spieler 0 eine Gewinnstrategie hat, und zwar mit einem LAR-Speicher, in dem lediglich Knoten der linken Seite berücksichtigt werden

(b) Zeigen Sie, dass keine Gewinnstrategie für Spieler 0 existiert, die einen Speicher mit weniger als $(\binom{n}{(n/2)}/n)$ Zuständen verwendet.

Hinweis: Betrachten Sie Strategien von Spieler 1, die der Wahl von Mengen $M \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$ entsprechen mit $|M| = \frac{n}{2}$.