Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W.Pakusa

SS 2013

9. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 24. 6. um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Sei C eine endliche Menge. Eine *Paarbedingung* über C ist eine Menge

$$\mathcal{P} = \{(L_1, R_1), (L_2, R_2,), \dots, (L_k, R_k)\}$$

mit $L_i, R_i \subseteq C$. Eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert die Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit

$$\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq C : F \cap L_i \neq \emptyset \Longrightarrow F \cap R_i \neq \emptyset \text{ für alle } i = 1, \dots, k\},$$
$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0 \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definierte Muller-Bedingung ist eine Streett-Rabin-Bedingung.

(b) Jede Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ist zu einer Paarbedingung $\mathcal{P}$ äquivalent.

Hinweis: Betrachten Sie zu jedem Knoten $(X, 1)$ des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums den eindeutigen Nachfolger $(Y, 0)$ und konstruieren Sie daraus ein geeignetes Paar.

(c) Finden Sie eine Klasse von Paarbedingungen, so dass die dadurch definierten Mullerbedingungen genau die Paritätsbedingungen sind.

Hinweis: Benutzen Sie, dass eine Muller-Bedingung genau dann zu einer Paritätsbedingung äquivalent ist, wenn ihr Zielonka-Baum ein Pfad ist.

Aufgabe 2

Sei $C = \{1, \dots, k\}^2$ und $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ die durch die Paarbedingung $\{(L_1, R_1), \dots, (L_k, R_k)\}$ mit

$$L_i = \{(i, j) : j = 1, \dots, k\},$$
$$R_i = \{(i, i)\}$$

definierte Streett-Rabin-Bedingung (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass die Anzahl der Blätter des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums $k!$ beträgt.

Aufgabe 3

Sei C eine endliche Menge und $C = C_1 \uplus \cdots \uplus C_k$. Wir betrachten die durch $\mathcal{F}_1 = \{\ X \subseteq C :$ es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $X \subseteq C_i\}$ definierte Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ über C. Zeigen Sie, dass jedes Spiel mit Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ positional determiniert ist.