Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W.Pakusa

SS 2013

10. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 01. 07. um 12:00 Uhr am Lehrstuhl oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Eine *verallgemeinerte Büchi-Bedingung* über einer Menge C von Farben ist gegeben durch eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von C, also $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ und $B_1, \dots, B_k \subseteq C$. Sie definiert die Muller-Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, mit $\mathcal{F}_0 := \{X \subseteq C : \text{für alle } 1 \leq i \leq k : X \cap B_i \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0$.

Ein *verallgemeinertes Büchi-Spiel* über einer Arena $G = (V, V_0, V_1, E, \Omega \colon V \to C)$ ist ein Tupel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung für Spieler 0 ist.

(a) Ermitteln Sie für eine gegebene verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung $\mathcal{B}$ minimale Werte $m_0, m_1 \geq 1$, so dass verallgemeinerte Büchi-Spiele mit Gewinnbedingung $\mathcal{B}$ determiniert sind via Strategien mit Speicher der Größe m_i für Spieler i.

(b) Wir sagen, dass eine Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ *abgeschlossen ist unter Obermengen*, falls $X \in \mathcal{F}_0, X \subseteq Y$ impliziert $Y \in \mathcal{F}_0$. Zeigen Sie, dass unter Obermengen abgeschlossene Muller-Bedingungen genau den verallgemeinerten Büchi-Gewinnbedingungen entsprechen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NP-vollständig ist.

- Gegeben ein verallgemeinertes Büchi-Spiel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, $v \in V$ und eine natürliche Zahl k.
- Frage: Hat Spieler 0 von v aus eine Gewinnstrategie mit Speicher der Größe k?

Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis der NP-Härte das NP-vollständige Problem Vertexcover: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k. Frage: Gibt es eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, so dass für alle Kanten $(v, w) \in E$ gilt $v \in X$ oder $w \in X$.

Aufgabe 3

(a) Wir betrachten das durch die folgende Matrix gegebene 2-Personen-Spiel:

$$\begin{bmatrix} (2,5) & (1,1) \\ (4,3) & (2,3) \end{bmatrix}$$

Hat dieses Spiel

(i) ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

(ii) ein reines Nash-Gleichgewicht?

(b) Ist für alle Spiele jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht?

(c) Geben Sie ein endliches Zwei-Personen-Spiel in strategischer Form an, das ein eindeutiges (reines) Nash-Gleichgewicht hat, so dass beide Gleichgewichts-Strategien von einer anderen Strategie des jeweiligen Spielers dominiert werden.

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten das Spiel „Battle of the Sexes“ aus der Vorlesung, das durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie alle gemischten Nash-Gleichgewichte dieses Spiels.

(b) Wir betrachten das Spiel „Schere – Stein – Papier“ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, dass das Paar von gemischten Strategien, in dem beide Spieler jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Stein, Schere oder Papier auszuwählen, das einzige Nash-Gleichgewicht ist.