Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, W.Pakusa

SS 2013

11. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Montag, den 8. 7. um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1

Ein endliches Spiel $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N})$ in strategischer Form heißt *Potential-Spiel*, falls eine Potentialfunktion $\Phi : S \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle Strategieprofile $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$, alle Spieler $i \in N$ und alle $s'_i \in S_i$ gilt:

$$\Phi(s_i, s_{-i}) - \Phi(s'_i, s_{-i}) = p_i(s_i, s_{-i}) - p_i(s'_i, s_{-i})\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes Potential-Spiel ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt: Geben Sie ein Spiel an, das ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien besitzt, jedoch kein Potential-Spiel ist.

Aufgabe 2

(a) Geben Sie ein endliches 2-Personen-Spiel in strategischer Form mit einem eindeutigen gemischten Nash-Gleichgewicht (f^*, g^*) an, so dass für jeden der beiden Spieler $i = 0, 1$ gilt:

$$\max_{f \in \Delta(S_i)} \min_{g \in \Delta(S_{1-i})} p_i(f, g) < p_i(f^*, g^*).$$

(b) Sei für ein endliches Spiel $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N})$ ein Profil $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Delta(S)$ in gemischten Strategien gegeben. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist, wenn für jeden Spieler i gilt: jede (reine) Strategie $s \in \mathrm{supp}(\mu_i)$ ist eine beste Antwort auf μ_{-i}.

Aufgabe 3

Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien für das Traveller's Dilemma aus der Vorlesung an.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein Strategieprofil (μ_1, μ_2) genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn (μ_2, μ_1) ein Nash-Gleichgewicht ist und verwenden Sie das Ergebnis aus der Aufgabe 3(b).

Aufgabe 4

(a) Berechnen Sie für das Traveller's Dilemma die Mengen PL^∞ und PLS^∞.

(b) Wir betrachten das folgende 2-Personen-Spiel, in dem die beiden Spieler jeweils natürliche Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ wählen (also $S_1 = S_2 = \mathbb{N}$). Die Payoff-Funktionen sind gegeben durch

$$p_1(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y + 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und } p_2(x, y) = p_1(y, x).$$

Berechnen Sie für diesen Fall von unendlichen Strategieräumen die Menge PL^∞. Welche Besonderheiten treten auf, die bei endlichen Strategieräumen nicht möglich sind?