Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

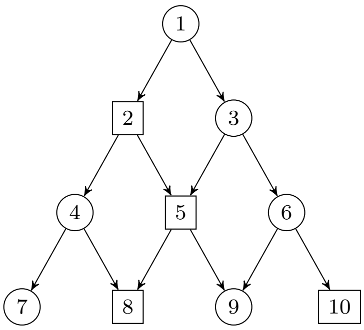
WS 2015

1. Übung Logik und Spiele

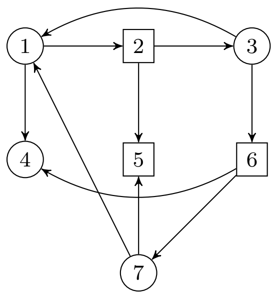
Abgabe: bis Mittwoch, den 28. 10., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Spielgraphen $\mathcal{G}_i = (V^i, V_0^i, V_1^i, E^i)$, in denen j eine Position von Spieler 0 und $\boxed{k}$ eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 in den beiden Spielen. Unendliche Partien werden als unentschieden gewertet.

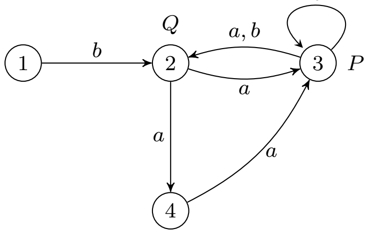
Aufgabe 2

Werten Sie folgende ML-Formeln auf der gegebenen Kripkestruktur aus, indem Sie das jeweilige Modelchecking-Spiel konstruieren und die Gewinnregionen ermitteln.

(a) $\varphi_a = \langle b \rangle \langle a \rangle P$;

(b) $\varphi_b = [a] \langle a \rangle (Q \vee \langle b \rangle P)$;

(c) $\varphi_c = [b] \left([b]P \wedge \langle a \rangle \neg P \right)$.



Aufgabe 3

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ ein Erreichbarkeitsspiel. Betrachten Sie die folgende induktive Definition zur Berechnung der Gewinnregionen:

$$W_\sigma^0 := \{ v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE = \varnothing \}$$

$$W_\sigma^{n+1} := \{ v \in V_\sigma \ : \ vE \cap W_\sigma^n \neq \varnothing \} \cup \{ v \in V_{1-\sigma} \ : \ vE \subseteq W_\sigma^n \}$$

(a) Zeigen Sie, dass $W_0^n \cap W_1^n = \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $W_\sigma^n \subseteq W_\sigma^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Wenn $\mathcal{G}$ ein *endliches* Erreichbarkeitsspiel ist, so gilt

$$W_\sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_\sigma^n.$$

In *unendlichen* Erreichbarkeitsspielen gilt im Allgemeinen allerdings nur $\supseteq$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit an!

Aufgabe 4

Beim (n, k)-*Streichholzspiel* sind zu Beginn n Streichhölzer gegebenen ($n \geq k \geq 1$). Das Spiel wird abwechselnd von zwei Spielern wie folgt gespielt. Der Spieler, der am Zug ist, entfernt mindestens 1 und höchstens k Streichhölzer. Entfernt er dabei das letzte Streichholz, so hat er das Spiel verloren. Ist nach seinem Zug noch mindestens ein Streichholz übrig, so ist der andere Spieler am Zug.

Für welche Wahlen von n und k gewinnt der Startspieler das (n, k)-Streichholzspiel?