Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

2. Übung Logik und Spiele

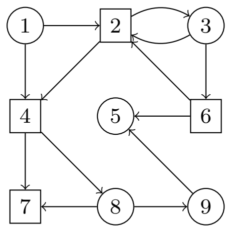
Abgabe: bis Mittwoch, den 04. 11., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Konstruieren Sie zu folgender Horn-Formel ψ das Erfüllbarkeitsspiel $\mathcal{G}_\psi$, und berechnen Sie die Gewinnregionen der beiden Spieler.

$$(U \to Y) \land (Y \land Z \to V) \land (1 \to U) \land (X \to Z) \land (U \land Y \to X) \land (V \to 0)$$

(b) Konstruieren Sie zu folgendem Spielgraphen $\mathcal{G}$ die Horn-Formel $\psi_\mathcal{G}$ und bestimmen Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus, ob Knoten 1 in der Gewinnregion von Spieler 0 liegt.



Aufgabe 2 13 Punkte

Ein *Threshold-Spiel* $\mathcal{G} := (V, E, t)$ besteht aus einem endlichen, gerichteten Graphen (V, E) und einer Threshold-Funktion $t : V \to \mathbb{N}_0$. Spielregeln: Von einer Position $v \in V$ aus wird wie folgt gespielt:

1. Spieler 0 wählt eine Menge $X \subseteq vE$ mit $|X| \geq t(v)$.
2. Spieler 1 wählt ein $v' \in X$. Die Partie wird nun ab Position v' fortgesetzt.

Sobald einer der Spieler nicht ziehen kann, verliert er das Spiel. Unendliche Partien gelten als unentschieden.
Das Entscheidungsproblem, ob Spieler 0 eine Gewinnstrategie von einem Knoten hat, ist definiert als

$$\textsc{Threshold} := \left\{(\mathcal{G}, v) \;:\; \mathcal{G} \text{ ist ein Threshold-Spiel}, v \in W^0_\mathcal{G}\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Threshold PTime-hart ist, in dem Sie Game $\leq_{\text{Logspace}}$ Threshold zeigen, d.h. eine Logspace-Reduktion von Game auf Threshold angeben[1].

(b) Zeigen Sie, dass Threshold in PTime liegt, in dem Sie Threshold $\leq_{\text{PTime}}$ Sat-Horn nachweisen.

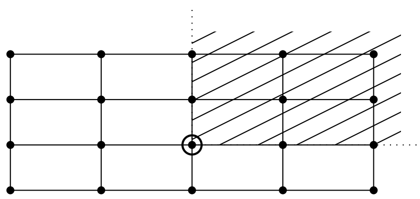
[1] Wie in der Vorlesung bezeichnet Game das Entscheidungsproblem für die Gewinnregion von Spieler 0 in Erreichbarkeitsspielen.

(c) Formulieren Sie (in Pseudocode) einen *alternierenden* LOGSPACE-Algorithmus, welcher THRESHOLD entscheidet.

Aufgabe 3 7 Punkte

Eine rechteckige Schokoladentafel mit $n \times m$ Stücken kann als Gitter $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\}$ aufgefasst werden, so dass die Gitterflächen den Stücken und die Knoten und Kanten des Gitters den Bruchstellen der Schokoladentafel entsprechen.

Wir betrachten folgendes Spiel auf einer rechteckigen Schokoladentafel: Die Spieler wählen abwechselnd (Spieler 0 beginnt) einen Gitterknoten und entfernen alle Schokoladenstücke, die sich rechts überhalb dieses Knotens befinden. Bei jedem Zug muss dabei mindestens ein Schokoladenstück entfernt werden. Verloren hat derjenige Spieler, der das letzte übrigbleibende Stück nehmen muss.



Zeigen Sie, dass (bis auf einen Sonderfall) immer der gleiche Spieler (welcher?) das Spiel gewinnt, egal wie groß die Schokoladentafel ist.

Hinweis: Geben Sie keine explizite Gewinnstrategie an, sondern folgern Sie deren Existenz aus dem Satz über die Determiniertheit endlicher, fundierter[2] Erreichbarkeitsspiele.

[2] Ein Erreichbarkeitsspiel $\mathcal{G}$ heißt fundiert, wenn es in $\mathcal{G}$ keine unendlichen langen Partien gibt.