Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

3. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 11. 11., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 7 Punkte

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Logik FO^k definiert als

$$\mathrm{FO}^k := \{\varphi \in \mathrm{FO} \;:\; \mathrm{width}(\varphi) \leq k\}\,.$$

Zeigen Sie, dass das Model-Checking-Problem für FO^2 PTIME-hart ist, in dem Sie eine LOGSPACE-Reduktion von GAME auf das Model-Checking-Problem für FO^2 angeben. Konstruieren Sie dazu für jedes Erreichbarkeitsspiel

$$\mathcal{G} := (V, V_0, V_1, E)$$

eine Formel $\varphi_{\mathcal{G}}(x) \in \mathrm{FO}^2(\{V_0, V_1, E\})$, so dass

$$\mathcal{G} \models \varphi_{\mathcal{G}}(v) \Longleftrightarrow v \in W_0$$

für jedes $v \in V$ gilt und begründen Sie, warum diese Formel mit Speicherplatzbedarf $\mathcal{O}(\log(|V|))$ berechnet werden kann.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass die Spieler in $\mathcal{G}$ stets abwechselnd ziehen, d.h. für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt $v \in V_0 \Longleftrightarrow w \in V_1$.

Aufgabe 2 7 Punkte

Ein Erreichbarkeitsspiel $\mathcal{G} := (V, V_0, V_1, E)$ heißt *endlich verzweigt*, wenn vE für jedes $v \in V$ eine endliche Menge ist. Betrachten Sie nochmal die induktive Definition zur Berechnung von Gewinnregionen:

$$W_\sigma^0 := \{v \in V_{1-\sigma} \;:\; vE = \varnothing\}$$

$$W_\sigma^{n+1} := \{v \in V_\sigma \;:\; vE \cap W_\sigma^n \neq \varnothing\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} \;:\; vE \subseteq W_\sigma^n\}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $W_\sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_\sigma^n$ in (potenziell) unendlich großen, aber endlich verzweigten Erreichbarkeitsspielen gilt.

Aufgabe 3 8 Punkte

Wir betrachten $\mathrm{FO} + \mathrm{C}$, die Erweiterung der Prädikatenlogik um Zählquantoren $\exists^{\geq n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mir folgender Semantik:

$\mathfrak{A} \models \exists^{\geq n} x \varphi(x, \bar{b})$ gdw. es existieren mindestens n verschiedene Elemente $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \bar{b})$.

(a) Ist $\mathrm{FO} + \mathrm{C}$ ausdrucksstärker als FO?

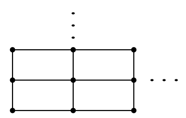
(b) Passen Sie die Regeln des Auswertungsspiels für FO auf geeignete Weise an, um ein Auswertungsspiel für FO + C zu erhalten.

(c) Geben Sie die Größe des Spielgraphen eines FO + C Model-Checking-Spiels und den Platzbedarf für die Repräsentation der Knoten an.

Aufgabe 4 8 Punkte

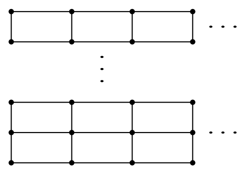
Wir betrachten die folgenden Varianten des Schokoladenspiels (vgl. Übung 2, Aufgabe 3) bei denen wir jeweils die Form der Schokoladentafel, nicht aber die übrigen Spielregeln anpassen, d.h. wiederum wählen die Spieler abwechselnd ein Schokoladenstück aus und entfernen alle Schokoladenstücke rechts oberhalb dieses Stücks. Der Spieler, der das letzte Stück nehmen muss, verliert. Welcher Spieler gewinnt jeweils die folgenden Varianten des Schokoladenspiels?

(a) Für das $(\omega \times \omega)$-Schokoladenspiel betrachten wir eine "quadratische" Schokoladentafel, die sowohl nach oben als auch nach rechts unendlich ist. Formal können die Zugmöglichkeiten repräsentiert werden durch das Gitter $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.



Hinweis: Geben Sie eine explizite Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

(b) Für $n \geq 1$ betrachten wir das $(n \times \omega)$-Schokoladenspiel bei dem die beiden Spieler abwechselnd Stücke einer "rechteckigen" Schokoladentafel wählen, die n Zeilen und unendlich viele Spalten besitzt. Entsprechend kodieren wir die Zugmöglichkeiten durch das Gitter $\{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.



Hinweis: Der Fall $n = 2$ ist für die Lösung von zentraler Bedeutung.