Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

5. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 25.11., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 8 Punkte

Geben Sie eine untere Schranke für die Anzahl der Zustände an, die jeder Richter für Büchi-Spiele haben muss, und beweisen Sie deren Korrektheit. Geben Sie dazu eine Familie $(\mathcal{G}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von beliebig großen Büchi-Spielen $\mathcal{G}_i = (V^i, V_0^i, V_1^i, E^i, F^i)$ sowie ein Polynom $f(n,k)$ an, sodass für jedes $\mathcal{G}_i$ ein Richter mit $f(|V^i|, |F^i|)$ Zuständen, aber keiner mit weniger Zuständen existiert. Außerdem soll gelten, dass für jedes Büchi-Spiel $G = (V, V_0, V_1, E, F)$ ein Richter mit $f(|V|, |F|)$ vielen Zuständen existiert.

Aufgabe 2 8 Punkte

Beschreiben Sie jeweils, was die folgenden Sätze ausdrücken:

(a) $$\forall x \forall y\, (Exy \rightarrow \neg\, [\mathrm{lfp}\, Pz : z = x \vee \exists u \exists v((Ezu \vee Euz) \wedge (Euv \vee Evu) \wedge Pv)]\, (y))$$

(b) $$\neg\exists x\Big([\mathrm{gfp}\, Fx : (V_0x \wedge \forall y(Exy \rightarrow Fy)) \vee (V_1x \wedge \exists y(Exy \wedge Fy))]\, (x) \\ \wedge [\mathrm{gfp}\, Fx : (V_1x \wedge \forall y(Exy \rightarrow Fy)) \vee (V_0x \wedge \exists y(Exy \wedge Fy))]\, (x)\Big)$$

Aufgabe 3 4 Punkte

Geben Sie eine Formel $\varphi(x)$ der Fixpunktlogik an, welche in $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ die Menge der Primzahlen definiert.

Aufgabe 4 10 Punkte

Geben Sie für die folgenden Spiele Formeln der Fixpunktlogik an, welche jeweils die Gewinnregion von Spieler 0 definieren.

(a) In einem *Doppel-Büchi*-Spiel $\mathcal{G} := (V, V_0, V_1, E, F_1, F_2)$ gewinnt Spieler 0 eine unendlich lange Partie π genau dann, wenn $\mathrm{Inf}(\pi) \cap F_i \neq \varnothing$ für beide $i \in \{1, 2\}$, d.h. wenn π unendlich oft beide Mengen F_1 und F_2 besucht.

(b) In einem *gemischten Büchi-coBüchi*-Spiel $\mathcal{G} := (V, V_0, V_1, E, F, H)$ gewinnt Spieler 0 genau dann unendliche Partien, wenn F unendlich oft aber H nur endlich oft besucht wird.