Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

6. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 02.12., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 3 Punkte

Beweisen Sie, dass Schach eine der folgenden Eigenschaften hat:

- Weiß hat eine Gewinnstrategie.
- Schwarz hat eine Gewinnstrategie.
- Beide Spieler haben eine Strategie, mit der jede Partie mindestens unentschieden endet.

Aufgabe 2 7 Punkte

Zu einem unendlichen Wort $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots \in \{a,b\}^\omega$ definieren wir die Kripkestruktur $\mathcal{K}_\alpha = (\mathbb{N}, E_a, E_b)$ mit

$$E_x := \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}, \alpha(n) = x\}$$

für $x \in \{a,b\}$. Seien nun $\varphi_1 = \nu X.\mu Y.([a]X \wedge [b]Y)$ und $\varphi_2 = \mu Y.\nu X.([a]X \wedge [b]Y)$.

(a) Berechnen Sie für $i = 1,2$ die Sprachen $L_i = \{\alpha \in \{a,b\}^\omega : \mathcal{K}_\alpha, 0 \models \varphi_i\}$.

Hinweis: Betrachten Sie das Model-Checking-Spiel $\mathcal{G}(\mathcal{K}_\alpha, \varphi_i)$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$ über allen Kripkestrukturen?

Aufgabe 3 10 Punkte

In der Vorlesung wurde die Definierbarkeit von Gewinnregionen behandelt. Im Folgenden entwickeln wir einen Begriff der logischen Definierbarkeit von Gewinnstrategien.

(a) (i) Formalisieren Sie einen Begriff der *nichtdeterministischen positionalen Strategie* für Spieler σ, der es erlaubt, für eine Position mehrere Nachfolger auszuwählen.

(ii) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine nichtdeterministische Strategie eine Gewinnstrategie ist.

(b) Eine Formel $\varphi(x,y)$ definiert eine Strategie in einem Spiel $\mathcal{G}$, wenn $\mathcal{G} \models \varphi(v,w)$ genau dann, wenn w ein von der Strategie ausgewählter Nachfolger von v ist. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, warum im Allgemeinen nur nichtdeterministische Strategien in diesem Sinne logisch definierbar sind.

(c) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x,y)$ an, die in jedem Erreichbarkeitsspiel eine (nichtdeterministische) positionale Gewinnstrategie für Spieler 1 definiert (also für einen Spieler mit einer Sicherheitsbedingung).

Aufgabe 4 10 Punkte

Ein *Banach-Mazur-Spiel* (über $\{0,1\}$) ist ein unendliches Spiel, in dem die beiden Spieler abwechselnd nicht-leere Worte $x_i, y_i \in \{0,1\}^+$ wählen. Spieler 0, der das Spiel beginnt, gewinnt das Spiel, wenn die Konkatenation $\alpha = x_0y_0x_1y_1\dots$ der gezogenen Wörter in der Gewinnmenge $W \subseteq \{0,1\}^\omega$ liegt.

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Gewinnbedingungen W, welcher Spieler das Banach-Mazur Spiel gewinnt.

(i) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält unendlich oft das Infix $0^{17}\}$,

(ii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält nur endlich oft das Infix $010\}$,

(iii) $W = \{\alpha \in \{0,1\}^\omega : \alpha$ enthält beliebig lange 0-Folgen als Infixe$\}$.

(b) Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der den Fréchet-Filter enthält, und sei W die Menge aller $\alpha \in \{0,1\}^\omega$, so dass $\{n : \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass das Banach-Mazur-Spiel mit Gewinnbedingung W nicht-determiniert ist.