Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

7. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 09.12., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Geben Sie für die folgende Mengen $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ jeweils die kleinste Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie an, die X enthält. Zeigen oder wiederlegen sie jeweils, dass X vollständig für die entsprechende Stufe ist.

  (i) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält beliebig lange Infixe } 10^n1\}$;

  (ii) $X = \{x \in \{0,1\}^\omega : x \text{ enthält das Infix 00, aber nicht das Infix 11}\}$;

  (iii) $X = \{v(w)^\omega : v \in \{0,1\}^*, w \in \{0,1\}^+\}$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Stufe Σ^0_α bzw. Π^0_α der Borel-Hierarchie unter endlicher Vereinigung und endlichem Schnitt abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 6 Punkte

Zu einer Sprache $W \subseteq A^*$ von endlichen Wörtern definieren wir die folgende Sprache $\lim W \subseteq A^\omega$ von unendlichen Wörtern:

$$\lim W = \{x \in A^\omega : \text{ex. unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x_0 \dots x_n \in W\}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $L \subseteq A^\omega$ gilt: $L \in \Pi^0_2 \iff L = \lim W$ für ein $W \subseteq A^*$.

Aufgabe 3 14 Punkte

Seien $X \subseteq B^\omega$ und $Y \subseteq C^\omega$ Borel-Mengen.

(a) Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Reduzierbarkeits-Relation $\leq$ folgende Eigenschaften erfüllt:

  (i) $X \leq Y$ und $Y \leq Z$ impliziert $X \leq Z$;

  (ii) $X \leq Y$ impliziert $B^\omega \setminus X \leq C^\omega \setminus Y$.

(b) Wir sagen, dass X und Y *unvergleichbar* sind, wenn weder $X \leq Y$ noch $Y \leq X$ gilt. Zeigen Sie, dass keine drei Borel-Mengen unvergleichbar sind. Beweisen Sie dazu, dass falls X und Y unvergleichbar sind folgt, dass $X \leq C^\omega \setminus Y$.

(c) Überprüfen Sie für $i \neq j \in \{0,1,2\}$, ob $X_i \leq X_j$ gilt.

  (i) $X_0 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{wenn } x \text{ das Infix } 01^n0 \text{ enthält, dann ist } n \text{ eine Primzahl}\}$

  (ii) $X_1 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{es gibt eine Turingmaschine } M \text{ mit } x[n] = 1 \text{ gdw. } M \text{ akzeptiert } 1^n\}$

  (iii) $X_2 = \{x \in \{0,1\}^\omega : \text{kommt in } x \text{ das Infix 00 unendlich oft vor, dann auch das Infix 11}\}$.