Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

8. Übung Logik und Spiele

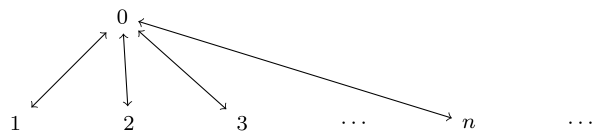
Abgabe: bis Mittwoch, den 16. 12., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 10 Punkte

Wir betrachten *Banach-Mazur Spiele* die auf (nicht-terminierenden) Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$, mit ausgezeichnetem Startknoten v_0, von Spieler 0 und Spieler 1 wie folgt gespielt werden. Die Spieler wählen abwechselnd (beginnend mit Spieler 0 von Knoten v_0) einen nicht-leeren Pfad beliebiger Länge in $\mathcal{G}$ aus, der den bisher konstruierten Pfad $v_0 v_1 v_2 \cdots v_{i-1}$ verlängert. Eine Partie resultiert damit in einem unendlichen Pfad $\pi \in V^\omega$ durch den Graphen $\mathcal{G}$. Die Gewinnbedingung für Spieler 0 ist spezifiziert durch eine Menge $W \subseteq V^\omega$ von gewinnenden Partien.

Eine *positionale* Strategie ist wie üblich definiert, d.h. ein Spieler darf seinen Zug (die Auswahl eines endlichen Pfades, der die aktuelle Partie verlängert) nur abhängig machen von der aktuellen Position (der Endposition des zuletzt gewählten Pfades) im Graphen.

(a) Wir betrachten den folgenden Graphen $\mathcal{G}$ mit Knotenmenge $\mathbb{N}$ und Startknoten 0



und der Gewinnbedindung $W \subseteq \mathbb{N}^\omega$ für Spieler 0, gegeben als

$$W = \{\pi \in \mathbb{N}^\omega : \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N} \text{ gilt } \pi(i) > \sum_{j<i} \pi(j)\}.$$

Hat Spieler 0 eine (positionale) Gewinnstrategie?

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Banach-Mazur Spiel auf Graphen mit einer Gewinnmenge $W \in \Sigma_2^0$ gilt, dass Spieler 0 genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn er eine positionale Gewinnstrategie hat. Gilt dies auch für Spieler 1?

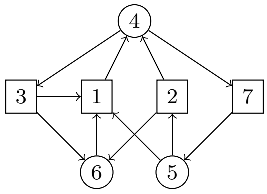
Hinweis: Falls Spieler 0 in einem solchen Spiel gewinnt, so kann er bereits in seinem ersten Zug so spielen, dass jede resultierende Partie für ihn gewinnend ist.

Aufgabe 2 10 Punkte

Betrachten Sie den unten dargestellten Spielgraphen mit der Muller-Bedingung

$$\mathcal{F}_0 = \{\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

und Anfangsposition 4. Geben Sie eine Gewinnstrategie für Spieler 0 mit der minimalen Anzahl von Speicherzuständen an und beweisen Sie die Minimalität.



Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega, \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ein Muller-Spiel mit $\Omega : V \to \mathbb{N}$. Wir nennen $\mathcal{G}$ ein (infinitäres) Paritätsspiel, wenn

$$\mathcal{F}_0 = \{X \subseteq \mathbb{N} : \min(X) \text{ ist gerade}\} \cup \{\varnothing\}$$

und wir nennen $\mathcal{F}_0$ einen *Abwärtskegel*, wenn eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathcal{F}_0 = \{X \ : \ X \subseteq A\}.$$

Ein *1-Registerspeicher* ist eine Speicherstruktur $(M, \text{update}, \text{init})$ mit $M = \mathbb{N}$ und $\text{update}(m, v) \in \{m, \Omega(v)\}$ für alle m,v.

(a) Geben Sie ein Muller-Spiel mit einem Abwärtskegel als Gewinnbedingung an, das von Spieler 0 gewonnen wird, dieser Spieler aber keine Gewinnstrategie mit endlichem Speicher hat.

(b) Reduzieren Sie mit einem 1-Registerspeicher Muller-Spiele mit Abwärtskegeln als Gewinnbedingung auf Paritätsspiele.