Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

9. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 06. 01. 2016, um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 14 Punkte

Sei C eine endliche Menge. Eine *Paarbedingung* über C ist eine Menge

$$\mathcal{P} = \{(L_1, R_1), (L_2, R_2,), \dots, (L_k, R_k)\}$$

mit $L_i, R_i \subseteq C$. Eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definiert die Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ mit

$$\mathcal{F}_0 = \{F \subseteq C : F \cap L_i \neq \varnothing \Longrightarrow F \cap R_i \neq \varnothing \text{ für alle } i = 1, \dots, k\},$$
$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0 \; .$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch eine Paarbedingung $\mathcal{P}$ definierte Muller-Bedingung ist eine Streett-Rabin-Bedingung.

(b) Jede Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ist zu einer Paarbedingung $\mathcal{P}$ äquivalent.

Hinweis: Betrachten Sie zu jedem Knoten $(X, 1)$ des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums den eindeutigen Nachfolger $(Y, 0)$ und konstruieren Sie daraus ein geeignetes Paar.

(c) Finden Sie eine Klasse von Paarbedingungen, so dass die dadurch definierten Mullerbedingungen genau die Paritätsbedingungen sind.

Hinweis: Benutzen Sie, dass eine Muller-Bedingung genau dann zu einer Paritätsbedingung äquivalent ist, wenn ihr Zielonka-Baum ein Pfad ist.

Aufgabe 2 6 Punkte

Sei $C = \{1, \dots, k\}^2$ und $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ die durch die Paarbedingung $\{(L_1, R_1), \dots, (L_k, R_k)\}$ mit

$$L_i = \{(i, j) : j = 1, \dots, k\},$$
$$R_i = \{(i, i)\}$$

definierte Streett-Rabin-Bedingung (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass die Anzahl der Blätter des zu $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ gehörenden Zielonka-Baums $k!$ beträgt.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei C eine endliche Menge und $C = C_1 \mathbin{\dot\cup} \cdots \mathbin{\dot\cup} C_k$. Wir betrachten die durch $\mathcal{F}_1 = \{\; X \subseteq C :$ es gibt $1 \leq i \leq k$ mit $X \subseteq C_i\}$ definierte Streett-Rabin-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ über C. Zeigen Sie, dass jedes Spiel mit Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ positional determiniert ist.

Der Weihnachtsmann ist der international führende Experte, wenn es um die neuesten Trends in Sachen Weihnachtsbaumgestaltung geht. Seine Expertise bei Zielonka-Bäumen allerdings genießt weit weniger hohe Wertschätzung (für einige Automaten wurde der Zustandsübergang durch zu viel buntes Lametta schon zur echten Qual).

Könnt ihr dem Weihnachtsmann vielleicht bei den folgenden Aufgaben helfen? Sicherlich belohnt er Euch dafür mit Bonuspunkten. Wir jedenfalls wünschen Euch allen erholsame und spielerische Festtage!

Aufgabe 4* 10* Punkte

Eine *verallgemeinerte Büchi-Bedingung* über einer Menge C von Farben ist gegeben durch eine Familie $\mathcal{B}$ von Teilmengen von C, also $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ und $B_1, \dots, B_k \subseteq C$. Sie definiert die Muller-Gewinnbedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, mit $\mathcal{F}_0 := \{X \subseteq C : \text{für alle } 1 \leq i \leq k : X \cap B_i \neq \varnothing\}$ und $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}_0$.

Ein *verallgemeinertes Büchi-Spiel* über einer Arena $G = (V, V_0, V_1, E, \Omega\colon V \to C)$ ist ein Tupel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung für Spieler 0 ist.

(a) Ermitteln Sie für eine gegebene verallgemeinerte Büchi-Gewinnbedingung $\mathcal{B}$ minimale Werte $m_0, m_1 \geq 1$, so dass verallgemeinerte Büchi-Spiele mit Gewinnbedingung $\mathcal{B}$ determiniert sind via Strategien mit Speicher der Größe m_i für Spieler i.

(b) Wir sagen, dass eine Muller-Bedingung $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ *abgeschlossen ist unter Obermengen*, falls $X \in \mathcal{F}_0, X \subseteq Y$ impliziert $Y \in \mathcal{F}_0$. Zeigen Sie, dass unter Obermengen abgeschlossene Muller-Bedingungen genau den verallgemeinerten Büchi-Gewinnbedingungen entsprechen.

Aufgabe 5* 10* Punkte

Zeigen Sie, dass das folgende Entscheidungsproblem NP-vollständig ist.

- Gegeben ein verallgemeinertes Büchi-Spiel $\mathcal{G} = (G, \mathcal{B})$, $v \in V$ und eine natürliche Zahl k.
- Frage: Hat Spieler 0 von v aus eine Gewinnstrategie mit Speicher der Größe k?

Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis der NP-Härte das NP-vollständige Problem Vertexcover: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k. Frage: Gibt es eine Teilmenge $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, so dass für alle Kanten $(v, w) \in E$ gilt $v \in X$ oder $w \in X$.