Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

10. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 13. 01., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 6 Punkte

(a) Wir betrachten das durch die folgende Matrix gegebene 2-Personen-Spiel:

$$\begin{bmatrix} (2,5) & (1,1) \\ (4,3) & (2,3) \end{bmatrix}$$

Hat dieses Spiel

(i) ein Gleichgewicht in dominanten Strategien?

(ii) ein reines Nash-Gleichgewicht?

(b) Ist für alle Spiele jedes Gleichgewicht in dominanten Strategien auch ein Nash-Gleichgewicht?

(c) Geben Sie ein endliches Zwei-Personen-Spiel in strategischer Form an, das ein eindeutiges (reines) Nash-Gleichgewicht hat, so dass beide Gleichgewichts-Strategien von einer anderen Strategie des jeweiligen Spielers dominiert werden.

Aufgabe 2 9 Punkte

Sei $\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N})$ ein endliches Spiel und $\mu \in \Delta(S)$ ein Profil in gemischten Strategien. Zeigen Sie, dass μ genau dann ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn für alle Spieler $i \in N$ gilt: jede (reine) Strategie $s \in \mathrm{supp}(\mu_i) \coloneqq \{s \in S_i \ : \ \mu_i(s) > 0\}$ ist beste Antwort auf μ_{-i}.

Ein symmetrisches 2-Personen-Spiel Γ ist gegeben durch einen Strategieraum S und eine Funktion $p : S \times S \to \mathbb{R}$, so dass $\Gamma = (\{1,2\}, (S,S), (p, \overline{p}))$ wobei $\overline{p}(t,s) \coloneqq p(s,t)$. Beim Traveler's Dilemma ist zum Beispiel $S = \{2, \dots, 100\}$ und

$$p(s,t) \coloneqq \begin{cases} s & \text{wenn } s = t \\ s+2 & \text{wenn } s < t \\ t-2 & \text{wenn } s > t. \end{cases}$$

Aufgabe 3 6 Punkte

Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien für das Traveler's Dilemma an.
Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4 9 Punkte

Sei S eine Menge von Strategien und $p : S \times S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definieren wir das Spiel Γ^n durch

$$\Gamma^n \coloneqq (N \coloneqq \{1, \ldots, n\}, (S_i \coloneqq S)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N})$$

wobei die Payoffs gegeben sind durch

$$p_i(s) = \sum_{j \neq i} p(s_i, s_j).$$

Sei weiter μ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien für Γ^n.

(a) Sei π eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(\mu_{\pi(1)}, \ldots, \mu_{\pi(n)})$ ein Nash-Gleichgewicht in Γ^n ist.

(b) Ist im Allgemeinen dann auch $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \mu_n)$ ein Nash-Gleichgewicht in Γ^{n+1}? Was ist mit $(\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_1)$?

(c) Angenommen, es wäre p die Funktion aus dem Traveler's Dilemma. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte in *reinen* Strategien in den Spielen Γ^n.