Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer, M. Hoelzel,
W. Pakusa

WS 2015

11. Übung Logik und Spiele

Abgabe: bis Mittwoch, den 20. 01., um 13:45 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.

Aufgabe 1 7 Punkte

Die Nash-Verhandlung ist ein Zwei-Personen-Spiel bei dem jeder der beiden Spieler $i \in \{1, 2\}$ eine Zahl $n_i \in \{0, 1 \dots, 100\}$ wählt. Wenn $n_1+n_2 \leq 100$ ist, so erhält jeder Spieler seine gewählte Zahl n_i als Payoff und 0 andernfalls.

Wenden Sie das Konzept der iterierten Regret-Minimierung aus der Vorlesung an.

Im folgenden sind alle auftretenden Zahlen (etwa Payoffs) rationale Zahlen.

Aufgabe 2 8 Punkte

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblems NASH(w) (wobei $w \in \mathbb{Q}$), ob es in einem Zwei-Personen-Spiel ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien vom Wert mindestens w für Spieler 1 gibt, in NP liegt.

Hinweis: Um ein Nash-Gleichgewicht in NP zu berechnen, können Sie wie folgt vorgehen: Nutzen Sie den Nicht-Determinismus, um die Supports zu erraten. Verwenden Sie nun die Charakterisierung aus Aufgabe 2 vom 10. Übungsblatt um ein lineares Ungleichunssystem anzugeben, welches ein gesuchtes Nash-Gleichgewicht beschreibt. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass es möglich ist, rationale Lösungen für lineare Ungleichunssysteme mit rationalen Koeffizienten in Polynomzeit zu berechnen.

Aufgabe 3 15 Punkte

Zeigen Sie nun die NP-Härte von NASH(1).

Hinweise: Reduzieren Sie dazu CNF-SAT auf NASH(1), in dem Sie wie folgt vorgehen:

1. Betrachten Sie für eine aussagenlogische Formel $\varphi = \bigwedge_i \bigvee_j L_{i,j}$ (wobei die $L_{i,j}$ Literale sind) das wie folgt definierte Spiel $\Gamma(\varphi)$. Sei V die Menge der Variablen, die in φ auftreten, während L die Menge der Literale ist, welche mit V gebildet werden können. Beachten Sie, dass wir V und L als disjunkt auffassen, d.h. eine Variable $X \in V$ ist *nicht* das gleiche wie das Literal $X \in L$. Ist $l \in L$ ein Literal, so schreiben wir $v(l) \in V$ für in l auftretende Variablen. Wir verwenden außerdem $n := |V|$. Sei schließlich C die Klauselmenge von φ, d.h. wir haben $C = \{\{L_{i,j} \ : \ j\} \ : \ i\}$. Nun definieren wir das symmetrische Zwei-Personen-Spiel

$$\Gamma(\varphi) = (\{1, 2\}, (S := V \cup L \cup C \cup \{f\}, S), (p, \overline{p}))$$

wobei p durch

(i) $p(l_1, l_2) := 1$ für alle $l_1, l_2 \in L$ mit $l_1 \neq \neg l_2$

(ii) $p(l, \neg l) := -2$ für alle $l \in L$

(iii) $p(l, x) := -2$ für alle $l \in L$, $x \in S \setminus L$

(iv) $p(v,l) \coloneqq 2$ für alle $v \in V$, $l \in L$ mit $v(l) \neq v$

(v) $p(v,l) \coloneqq 2-n$ für alle $v \in V$, $l \in L$ mit $v(l) = v$

(vi) $p(v,x) \coloneqq -2$ für alle $v \in V$, $x \in S \setminus L$

(vii) $p(c,l) \coloneqq 2$ für alle $c \in C$, $l \in L$ mit $l \notin c$

(viii) $p(c,l) \coloneqq 2-n$ für alle $c \in C$, $l \in L$ mit $l \in c$

(ix) $p(c,x) \coloneqq -2$ für alle $c \in C$, $x \in S \setminus L$

(x) $p(f,f) \coloneqq 0$

(xi) $p(f,x) \coloneqq 1$ für alle $x \in S \setminus \{f\}$

Außerdem ist $\overline{p}(s,t) \coloneqq p(t,s)$.

2. Zeigen Sie, dass (f,f) und dass für jede erfüllende Belegung $B \models \varphi$ das Profil (μ_B, μ_B) ein Nash-Gleichgewicht ist. Hierbei ist $\mu_B(l) = \frac{1}{n}$, wenn $l \in L$ ein Literal ist und $B \models l$. Bestimmen Sie außerdem die Werte dieser Gleichgewichte.

3. Zeigen Sie nun, dass es keine weiteren Nash-Gleichgewichte gibt:

   (i) Zeigen Sie zuerst, dass jedes Nash-Gleichgewicht $(\mu_1, \mu_2) \neq (f,f)$ den Wert 1 (für beide Spieler) hat. Beobachten Sie dazu, dass $\hat{p_1}(\mu_1, \mu_2) + \hat{p_2}(\mu_1, \mu_2) = 2$ gelten muss.

   (ii) Beweisen Sie nun, dass $C \cup V$ disjunkt zu den Supports von Nash-Gleichgewichten ist.

   (iii) Zeigen Sie, dass f nur dann im einem Support eines Nash-Gleichgewichts (μ_1, μ_2) liegen kann, wenn in (μ_1, μ_2) ausschließlich f gespielt.

   (iv) Schließlich: Nutzen Sie die bisherigen Ergebnisse, um nachzuweisen, dass für jedes Nash-Gleichgewicht $(\mu_1, \mu_2) \neq (f,f)$ eine Belegung $B \models \varphi$ existiert, so dass $(\mu_1, \mu_2) = (\mu_B, \mu_B)$ gilt.