Übung 11 Aufgabe 3 - Lösung

Matthias Hoelzel

9. Februar 2016

Behauptung. (f, f) und (μ_B, μ_B) für Modelle $B \models \varphi$ sind Nash-Gleichgewichte (NG).

Beweis. Von (f, f) abzuweichen, etwa zu (μ_1, f) für $\mu_1 \in \Delta(S)$ mit $\mu_1(f) < 1$, ist nicht profitabel, weil

$$p_1(\mu_1, f) = -2(1 - \mu_1(f)) < 0 = p_1(f, f).$$

Zeige nun, dass (μ_B, μ_B) ein NG ist. Aufgrund von Übungsblatt 10 Aufgabe 2, genügt es zu zeigen, dass die Literale $l \in L$ mit $B \models l$ beste Antworten sind, d.h. dass für alle $l \in \text{supp}(\mu_B)$, $s \in S$

$$p_1(s, \mu_B) \leq p_1(l, \mu_B)(= p_1(\mu_B, \mu_B) = 1).$$

Im Folgenden sei stets $l \in \text{supp}(\mu_B)$. Wir führen eine Fallunterscheidung nach s durch:

- Fall $s \in L$, $B \not\models s$. Dann

$$p_1(s, \mu_B) = \frac{n-1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot (-2) < 1 = p_1(l, \mu_B)$$

- Fall $s \in L$, $B \models s$. Trivial, denn die Strategien aus dem Support produzieren gegen μ_B alle den gleichen Payoff 1.

- Fall $s \in V$: Dann folgt aus der Definition von p_1:

$$p_1(s, \mu_B) = \frac{n-1}{n} \cdot 2 + \frac{1}{n}(2 - n) = \frac{2n - 2 + 2 - n}{n} = 1 = p_1(l, \mu_B).$$

- Fall $s \in C$: Angenommen, es werden k Literale aus s durch B erfüllt. Weil $B \models \varphi$, muss mindestens ein Literal von s erfüllt werden, d.h. $k \geq 1$. Da

$\mu_B(x) = 0$ für alle $x \in S \setminus L$ und alle $x \in L$ mit $B \not\models l$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_1(s,\mu_B) &= \sum_{l\in L,\, B\models l} \frac{1}{n} \cdot \begin{cases} 2-n & l \in s \\ 2 & l \notin s \end{cases} \\
&= \frac{k}{n}(2-n) + \frac{n-k}{n} \cdot 2 \\
&= \frac{2k - kn + 2n - 2k}{n} = \frac{2n-kn}{n} \\
&= 2 - k \underset{(k\geq 1)}{\leq} 2 - 1 = 1 = p_1(l,\mu_B).
\end{aligned}$$

- Fall $s = f$: Aus der Definition von p_1 folgt $p_1(f,\mu_B) = (-2) < 1 = p_1(l,\mu_B)$.

In jedem Fall haben wir $p_1(s,\mu_B) \leq p_1(l,\mu_B)$ und daher sind die Literale $l \in L$ mit $B \models l$ tatsächlich beste Antworten gegen μ_B. Also ist (μ_B,μ_B) ein NG.

$\square$

Hier nun der schwierige Teil:

Behauptung. Es gibt außer (f,f) nur NG der Form (μ_B,μ_B) für Interpretationen B mit $B \models \varphi$.

Beweis. Es sei $\mu = (\mu_1,\mu_2) \neq (f,f)$ ein NG. Wir beweisen, dass $\mu = (\mu_B,\mu_B)$ für eine Belegung B mit $B \models \varphi$ ist, in dem wir folgende Aussagen beweisen:

1. $\mu_i(f) < 1$ für beide $i \in \{1,2\}$.
2. $\mu_i(f) = 0$ für beide $i \in \{1,2\}$.
3. Es ist $p_1(\mu) + p_2(\mu) \leq 2$.
4. Es gilt sogar $p_1(\mu) = p_2(\mu) = 1$.
5. Es ist $\mu_i(x) = 0$ für alle $i \in \{1,2\}$ und alle $x \in C \cup V$.
6. Für alle Literale $l \in L$ ist entweder $\mu_1(l) = \mu_2(l) = 0$ oder $\mu_1(l) = \mu_2(l) = \frac{1}{n}$. Außerdem ist die Interpretation B, welche definiert ist durch

   $$B \models l :\Longleftrightarrow l \in L \text{ und } \mu_1(l) = \mu_2(l) = \frac{1}{n},$$

   ein Modell von φ.

Zu 1.: Angenommen, es wäre $\mu_i(f) \neq 1$ für ein $i \in \{1,2\}$. Ohne Einschränkung sei $i = 1$. Also spielt Spieler 1 nur mit f, d.h. $\mu_1 = f$. Aufgrund der Definition der Payoff-Funktion p_2, erhalten wir

$$p_2(\mu) = p_2(f,\mu_2) = -2 \cdot (1 - \mu_2(f)) + 0 \cdot \mu_2(f) = -2 \cdot (1 - \mu_2(f))$$

sowie

$$p_2(\mu_1, f) = p_2(f, f) = 0.$$

Da μ ein NG ist, folgt $p_2(\mu_1, f) \leq p_2(\mu)$. Zusammen mit den beiden Gleichungen von eben, bedeutet dies aber

$$0 \leq -2 \cdot (1 - \mu_2(f)) = -2 + 2\mu_2(f) \Longleftrightarrow 2 \leq 2\mu_2(f) \Longleftrightarrow \mu_2(f) \geq 1.$$

Somit erhalten wir $\mu_2(f) = 1$. Also ist $\mu = (f, f)$ im Widerspruch zu der Vorraussetzung, dass $\mu \neq (f, f)$! Also ist 1. bewiesen!

Zu 2.: Beweis durch Widerspruch! Angenommen, es wäre $\mu_1(f) > 0$ oder $\mu_2(f) > 0$. Ohne Einschränkung sei $\mu_1(f) > 0$. Da wir 1. schon gezeigt haben, können wir

$$0 < \mu_1(f) < 1 \tag{1}$$

folgern. Wir haben

$$\begin{aligned} p_2(\mu) &= \sum_{s \in S} \mu_2(s) \cdot p_2(\mu_1, s) \\ &= \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_2(s) \cdot p_2(\mu_1, s) + \mu_2(f) \cdot p_2(\mu_1, f) \\ &= \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_2(s) \cdot p_2(\mu_1, s) + \mu_2(f) \cdot (1 - \mu_1(f)) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Werte $p_2(\mu_1, s)$ (für $s \in S \setminus \{f\}$) etwas genauer:

$$\begin{aligned} p_2(\mu_1, s) &= \sum_{t \in S} \mu_1(t) \cdot p_2(t, s) \\ &= \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot p_2(t, s) + \mu_1(f) \cdot p_2(f, s) \\ &\underset{(s \neq f)}{=} \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot p_2(t, s) - 2\mu_1(f) \\ &\underset{(p_2 = \overline{p})}{=} \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot \overline{p}(t, s) - 2\mu_1(f) \\ &\underset{(\overline{p}(t,s) = p(s,t))}{=} \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot p(s, t) - 2\mu_1(f) \end{aligned} \tag{2}$$

Die Werte $p_2(\mu_1, s)$ treten in der Berechnung von $p_2(\mu)$ auf (siehe oben) und dort ist $s \in S \setminus \{f\}$. Dies bedeutet, dass $s \in S \setminus \{f\} = V \cup C \cup L$ ist. Selbstverständlich müssen wir nur die Summanden betrachten bei denen $\mu_2(s) > 0$ ist, denn Strategien $s \in S$ mit $\mu_2(s) = 0$ werden ja gar nicht von Spieler 2 gespielt. Die Strategien, welche Spieler 2 mit μ_2 auswählt, bilden bekanntlich den Support von μ_2. Wir zeigen nun, dass $L \cap \operatorname{supp}(\mu_2) = \varnothing$ ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil an und führen es zu einem Widerspruch.

Gelte $L \cap \operatorname{supp}(\mu_2) \neq \varnothing$. Dann existieren irgendwelche $s \in L \cap \operatorname{supp}(\mu_2)$. Sei ein solches s fixiert! Nach Übungsblatt 10 Aufgabe 2 bestehen die Supports von Nash-Gleichgewichten nur aus besten Antworten gegen die Reaktion der anderen Spieler. Da μ nach Annahme ein NG ist und $s \in \mathrm{supp}(\mu_2)$, folgt, dass s eine beste Antwort gegen μ_1 ist. Dies bedeutet, dass

$$p_2(\mu_1, s) \geq p_2(\mu_1, t) \text{ für alle } t \in S.$$

Ergo folgt insbesondere

$$p_2(\mu_1, s) \geq p_2(\mu_1, f) = 1 - \mu_1(f).$$

Andererseits haben wir aber wegen (2) (beachte: da $s \in L$ folgt $s \neq f$):

$$p_2(\mu_1, s) = \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot p(s,t) - 2\mu_1(f)$$

Nun ist aber $p(s,t) \in \{-2, 1\}$ und daher $p(s,t) \leq 1$, weil $s \in L$ ja ein Literal ist! Deswegen ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_2(\mu_1, s) &= \sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t) \cdot \underbrace{p(s,t)}_{\leq 1} - 2\mu_1(f) \\
&\leq \underbrace{\sum_{t \in S \setminus \{f\}} \mu_1(t)}_{\leq 1} - 2\mu_1(f) \\
&\leq 1 - 2\mu_1(f) \\
&< 1 - \mu_1(f) \quad (\text{weil } \mu_1(f) > 0)
\end{aligned}$$

Also $p_2(\mu_1, s) < 1 - \mu_1(f)$ im Widerspruch zu $p_2(\mu_1, s) \geq 1 - \mu_1(f)$. Die Widerspruchannahme, dass $L \cap \mathrm{supp}(\mu_2) \neq \varnothing$, war somit falsch. Daher muss doch $L \cap \mathrm{supp}(\mu_2) = \varnothing$ sein!

Dies bedeutet, dass Spieler 2 niemals Literale, also Elemente aus L, spielt (in dem NG μ)! Anders formuliert: Spieler 2 spielt nur Strategien aus $S \setminus L$. Betrachte den erwarteten Payoff von Spieler 1 in dem NG μ:

$$\begin{aligned}
p_1(\mu) &= \sum_{s \in S} \mu_1(s) \cdot p_1(s, \mu_2) = \mu_1(f) \cdot p_1(f, \mu_2) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot p_1(s, \mu_2) \\
&= \mu_1(f) \cdot (1 - \mu_2(f)) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot p_1(s, \mu_2) \\
&= \mu_1(f) \cdot (1 - \mu_2(f)) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot \sum_{t \in S} \mu_2(t) \cdot p_1(s,t)
\end{aligned}$$

Benutze, dass Spieler 2 nur Strategien aus $S \setminus L$ benutzt:

$$\begin{aligned}
p_1(\mu_1, \mu_2) &= \mu_1(f) \cdot (1 - \mu_2(f)) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot \sum_{t \in S \setminus L} \mu_2(t) \cdot \underbrace{p_1(s,t)}_{=(-2)} \\
&\leq \mu_1(f) \cdot (1 - \mu_2(f)) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot \sum_{t \in S \setminus L} \mu_2(t) \cdot \overbrace{p_1(f,t)}^{\in\{0,1\}} \\
&= \mu_1(f) \cdot p_1(f, \mu_2) + \sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \cdot p_1(f, \mu_2) \\
&= \mu_1(f) \cdot p_1(f, \mu_2) + \left[\sum_{s \in S \setminus \{f\}} \mu_1(s) \right] \cdot p_1(f, \mu_2) \\
&= \mu_1(f) \cdot p_1(f, \mu_2) + [1 - \mu_1(f)] \cdot p_1(f, \mu_2) \\
&= \underbrace{[1 - \mu_1(f) + \mu_1(f)]}_{=1} \cdot p_1(f, \mu_2) \\
&= p_1(f, \mu_2)
\end{aligned}$$

Die Ungleichung wird strikt, sobald $\mu_1(s) > 0$ für ein $s \in S \setminus \{f\}$ ist. Da μ aber ein NG ist, darf die Ungleichung nicht strikt werden. Daher folgt $\mu_1(s) = 0$ für alle $s \in S \setminus \{f\}$. Andererseits ist μ_1 aber eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S, also muss $\mu_1(f) = 1$ gelten, aber dies steht im Widerspruch zu $\mu_1(f) < 1$ (siehe (1))! Widerspruch!

Zu 3.: Wir beoachten zunächst, dass $p_1(s,t) + p_2(s,t) \leq 2$ für alle $s, t \in S$ aufgrund der Definition der Payoff-Funktionen gilt. Daraus ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
p_1(\mu) + p_2(\mu) &= \sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot p_1(s,t) + \sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot p_2(s,t) \\
&= \sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot \underbrace{[p_1(s,t) + p_2(s,t)]}_{\leq 2} \\
&\leq \underbrace{\left[\sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \right]}_{=1} \cdot 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Zu 4.: Zunächst zeigen wir, dass $p_1(\mu) + p_2(\mu) = 2$ ist. Wäre $\neq 2$, so müsste aufgrund von 3. bereits $p_1(\mu) + p_2(\mu) < 2$ sein. Dann haben wir $p_1(\mu) < 1$ oder $p_2(\mu) < 1$. Ohne Einschränkung gelte $p_1(\mu) < 1$. Da beide Spieler nicht mit f spielen (siehe 2.), kann Spieler 1 einfach zu f wechseln und dies produziert nun den Payoff

$$p_1(f, \mu_2) = 1 - \underbrace{\mu_2(f)}_{=0} = 1 > p_1(\mu).$$

Also ist μ kein NG im Widerspruch zur Annahme!

Zu 5.: Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis: Gelte $\mu_1(x) > 0$ für ein $x \in C \cup V$. Sei $y \in \text{supp}(\mu_2)$ beliebig. Wir beobachten, dass aufgrund der Definition der Payoff-Funktionen $p_1(x,y) + p_2(x,y) \leq 0$ (wegen $x \in C \cup V$) und somit

$$\begin{aligned} p_1(\mu) + p_2(\mu) &= \sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot p_1(s,t) + \sum_{s,t \in S} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot p_2(s,t) \\ &= \underbrace{\mu_1(x)\mu_2(y)}_{>0} \cdot \underbrace{(p_1(x,y) + p_2(x,y))}_{\leq 0} \\ &\quad + \sum_{s,t \in S,\, (s,t) \neq (x,y)} \mu_1(s)\mu_2(t) \cdot \underbrace{(p_1(s,t) + p_2(s,t))}_{\leq 2} \\ &< 2 \end{aligned}$$

folgt im Widerspruch zu 4.! Aus $p_1(\mu) + p_2(\mu) = 2$ folgt nun $p_1(\mu) = p_2(\mu) = 1$, denn wäre $p_i(\mu) \neq 1$ für ein $i \in \{1,2\}$, so wäre $p_j(\mu) < 1$ und $p_{3-j}(\mu) > 1$ für ein $j \in \{1,2\}$. Somit könnte Spieler j wieder zu f abweichen und einen besseren Payoff bekommen, aber das ist unmöglich, denn μ ist NG!

Zu 6.: Wegen 2. und 5., spielen die beiden Spieler ausschließlich Literale. Wenn ein Spieler das Literal l spielt, dann darf der andere Spieler nicht mit $\neg l$ spielen (sonst taucht eine (-2) auf und dann wäre $p_1(\mu) + p_2(\mu) < 2$). Wenn Spieler i für eine Variable x weder das Literal x noch $\neg x$ spielen würde, dann könnte der andere zu der Variable x abweichen und Payoff 2 anstelle von 1 bekommen. Also darf auch kein Spieler sowohl mit x als auch mit $\neg x$ spielen (denn dann produziert der andere eine (-2)).

Der Fall, dass die Wahrscheinlichkeiten nicht alle $= \frac{1}{n}$ wären, ist unmöglich. Sonst gäbe es einen Spieler i und eine Variable x mit $\mu_i(l) < \frac{1}{n}$, $\mu_i(\neg l) = 0$ und $v(l) = x$. Dann kann Spieler $3-i$ zu der Variablen x abweichen und einen besseren Payoff erziehlen, denn wir haben

$$\begin{aligned} p_{3-i}(x, \mu_{-(3-i)}) &= (2-n) \cdot \mu_i(l) + 2 \cdot (1 - \mu_i(l)) \\ &= 2\mu_i(l) - n\mu_i(l) + 2 - 2\mu_i(l) \\ &= \underbrace{-n}_{<0} \cdot \underbrace{\mu_i(l)}_{<\frac{1}{n}} + 2 \\ &> 2 - \frac{n}{n} = 1 = p_{3-i}(\mu) \end{aligned}$$

Aber das ist unmöglich, da μ ein NG ist!

Es bleibt zu zeigen, dass B mit $B \models l \iff \mu_i(l) = \frac{1}{n}$ ein Modell von φ ist. Wenn nicht, dann gäbe es eine Klausel c, die nicht erfüllt ist. Dann können beide Spieler einseitig zu c abweichen und Payoff 2 anstatt 1 bekommen. Das ist schon wieder ein Widerspruch dazu, dass μ ein NG sein soll! $\square$