

## 1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.4. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

### Aufgabe 1

2+2+2+2\*+2\* Punkte

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind (mit Begründung).

- (a)  $(X \rightarrow 1) \rightarrow (0 \rightarrow Y)$
- (b)  $(X \wedge (Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow (1 \rightarrow Y)$
- (c)  $\neg(\neg X \rightarrow (Y \rightarrow \neg X))$
- (d)\*  $(1 \rightarrow (X \vee Y)) \wedge (0 \rightarrow (\neg X \wedge \neg Y))$
- (e)\*  $(X \wedge \neg Y) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow Z)$

### Aufgabe 2

5+5 Punkte

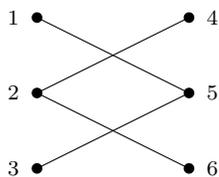
- (a) Finden Sie eine Formel  $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ , so dass für jede Interpretation  $\mathcal{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt, dass sich durch Ändern eines beliebigen Wahrheitswerts  $\mathcal{I}(X_i)$  auch der Wahrheitswert  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}}$  ändert.
- (b) Schreiben Sie eine Formel  $\varphi(X_0, \dots, X_4)$ , die genau dann gilt, wenn eine gerade Anzahl der Variablen  $X_i$  mit 1 belegt sind.

### Aufgabe 3

3+4+3 Punkte

Jeden ungerichteten Graphen mit Knoten  $1, \dots, n$  identifizieren wir mit einer aussagenlogischen Interpretation in folgender Weise: Jedem Paar  $i < k$  von Knoten wird eine Variable  $X_{ik}$  zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen  $i$  und  $k$  gibt.

- (a) Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  an, die ausdrückt, dass der Graph die folgende Gestalt hat:



- (b) Konstruieren Sie zunächst für  $n = 4$  und dann für beliebige  $n$  Formeln  $\varphi_n$ , die ausdrücken, dass der Graph zusammenhängend ist.
- (c) Konstruieren Sie für beliebige  $n$  Formeln  $\varphi_n$ , die ausdrücken, dass der Graph einen Hamiltonkreis enthält.

**Aufgabe 4\***

5\*+5\* Punkte

Sei  $\psi \rightarrow \varphi$  eine aussagenlogische Tautologie. Wir nennen  $\vartheta$  einen *Interpolanten* für  $\psi \rightarrow \varphi$ , wenn  $\psi \rightarrow \vartheta$  und  $\vartheta \rightarrow \varphi$  Tautologien sind und  $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\psi(\psi(1, Y), Y)$  ein Interpolant für  $\psi(X, Y) \rightarrow \varphi(Y, Z)$  ist. Hierbei bezeichnet  $\psi(\vartheta, Y)$  die Formel, die aus  $\psi(X, Y)$  durch Ersetzen jedes Vorkommens von  $X$  durch die Formel  $\vartheta$  entsteht.
- (b) Zeigen Sie per Induktion über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in  $\psi$  aber nicht in  $\varphi$  vorkommen, dass zu jeder Tautologie  $\psi \rightarrow \varphi$  ein Interpolant existiert (*aussagenlogisches Interpolationstheorem*).