Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Freitag, den 2.5. um 8:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 3+3+4 Punkte

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \vee Z) \wedge (Y \vee \neg Z \vee X) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Y \vee \neg X)\,.$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg X \wedge Z) \vee Y \vee (X \wedge \neg V \wedge \neg Y) \vee (\neg Z \wedge \neg Y) \vee (X \wedge V)\,.$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung anhand der Resolutionsmethode:

$$\{\neg Y \vee X\ , Z \vee Y \vee X \vee \neg U\ , \neg Z \vee Y\ , \neg X \vee V\ , Z \vee X \vee U\} \models X \wedge V\,.$$

Aufgabe 2 6+4 Punkte

Wir sagen, dass eine Formelmenge Φ zu einer anderen Formelmenge Ψ *äquivalent* ist, wenn für alle zu $\Phi \cup \Psi$ passenden Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models \Phi \iff \mathfrak{I} \models \Psi\,.$$

(a) Sei Φ äquivalent zu einer endlichen Formelmenge Ψ. Zeigen Sie, dass es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, welche zu Φ äquivalent ist.

(b) Sei $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi_{n+1} \models \varphi_n$, aber $\varphi_n \not\models \varphi_{n+1}$. Zeigen Sie, dass Φ zu *keiner* endlichen Formelmenge äquivalent ist.

Aufgabe 3 8+2 Punkte

Ein *Dominosystem* $\mathcal{D}$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen gleicher Größe, deren vier Kanten (oben, unten, links, rechts) gefärbt sind. Eine *Parkettierung* eines Teils $X \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Ebene ist eine vollständige Überdeckung mit Dominosteinen, d.h. eine Abbildung $\rho : X \to D$, so dass aneinandergrenzende Kanten die selbe Farbe tragen. (Rotationen der Steine sind nicht erlaubt, aber jeder Stein kann beliebig oft verwendet werden.) Sei im Folgenden $\mathcal{D}$ ein beliebiges Dominosystem.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von König, dass $\mathcal{D}$ genau dann eine Parkettierung der Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erlaubt, wenn $\mathcal{D}$ eine Parkettierung beliebig großer endlicher Quadrate erlaubt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\mathcal{D}$ genau dann eine Parkettierung von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erlaubt, wenn $\mathcal{D}$ eine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ erlaubt.