Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 8.5. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

5+5 Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Einheitsresolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(\neg Z \lor \neg U \lor Y) \land (\neg Z \lor W \lor \neg V) \land U \land (Z \lor \neg U) \land \neg X$$
$$\land (V \lor \neg Y \lor \neg Z \lor \neg U) \land (\neg Y \lor \neg Z \lor X \lor \neg W)$$

(b) Beweisen Sie, dass der Einheitsresolutionskalkül im Allgemeinen nicht vollständig ist: Geben Sie eine unerfüllbare (Nicht-Horn-)Klauselmenge an, von der Sie beweisen können, dass $\Box$ nicht per Einheitsresolution aus ihr ableitbar ist.

Aufgabe 2

4+4+2 Punkte

Die Quantifizierte Aussagenlogik (QAL) erweitert AL um Existenz- und Allquantoren über Aussagenvariablen, so dass Formeln der Art $\exists X_i\, \psi(X_1, \ldots, X_n)$ und $\forall X_i\, \psi(X_1, \ldots, X_n)$ gebildet werden können, welche "es gibt eine Interpretation für X_i, so dass ψ" bzw. "für alle Interpretationen von X_i gilt ψ" ausdrücken sollen.

(a) Geben sie präzise induktive Definitionen für die Syntax und die Semantik von QAL an (analog zu den Definitionen für AL).

(b) Zeigen Sie, dass jede Formel aus QAL zu einer Formel aus AL äquivalent ist.

(c) Überlegen Sie, welche Auswirkung die Transformation einer QAL-Formel in eine äquivalente AL-Formel auf die Formellänge hat.

Aufgabe 3

2+3+1+4 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *P-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Dabei heißt eine Klausel *positiv*, falls sie kein negatives Literal enthält.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne positive Klauseln erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich $\Box$ aus K durch P-Resolution ableiten.

Hinweis: Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in K vorkommenden Aussagenvariablen. Betrachten Sie dabei die Verteilung der Klauseln auf Mengen A, B und C dementsprechend, ob eine Klausel eine gegebene Variable positiv, negativ oder gar nicht enthält.