Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Freitag, den 23.5. um 8:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 3+3+4 Punkte

Konstruieren Sie für die folgenden Sequenzen jeweils einen Beweis im Sequenzenkalkül oder geben Sie eine falsifizierende Interpretation an:

(a) $X \lor Y,\ Y \to (Z \lor X) \ \Rightarrow\ X,\ Z\,;$

(b) $X \to Y,\ Z \to Y \ \Rightarrow\ X \lor Z,\ \neg Y\,;$

(c) $X \to Y,\ Y \to Z \ \Rightarrow\ Y \land (X \to Z),\ Y \to \neg X\,.$

Aufgabe 2 3+3+4 Punkte

Eine Schlussregel ist *korrekt*, wenn (für jede Wahl von $\Gamma, \Delta, \psi, \varphi, \ldots$) die Gültigkeit aller Prämissen die Gültigkeit der Konklusion impliziert. Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

(a) $\dfrac{\Gamma, \varphi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma, \psi \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma, \varphi \lor \psi \ \Rightarrow\ \Delta}\,;$

(b) $\dfrac{\Gamma \ \Rightarrow\ \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \ \Rightarrow\ \Delta}\,;$

(c) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \neg\psi \ \Rightarrow\ \Delta \qquad \Gamma, \neg\varphi, \psi \ \Rightarrow\ \Delta}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \ \Rightarrow\ \Delta}\,.$

Hier bezeichnet $\oplus$ den Junktor für das *exklusive Oder*.

Aufgabe 3 6+4 Punkte

Sei $|$ der logische Junktor für NAND, definiert durch $\mathfrak{I} \models (\varphi \mid \psi)$ gdw. $\mathfrak{I} \not\models (\varphi \land \psi)$.

(a) Geben Sie die Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ an, die Ihnen erlauben, den Junktor $|$ auf der linken bzw. rechten Seite der Konklusion einzuführen (analog zu den Schlussregeln $(\land\ \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\ \land)$ für $\land$) und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Schlussregeln.

(b) Konstruieren Sie einen Beweis für die Sequenz

$$(X \mid Y) \mid Z \ \Rightarrow\ (Z \to X) \land (Z \to Y)$$

in dem um die Schlussregeln $(\mid\Rightarrow)$ und $(\Rightarrow\mid)$ erweiterten Sequenzenkalkül.

Aufgabe 4* 20* Punkte

Beweisen Sie, dass jede Formel φ, deren Modelle unter Schnitt abgeschlossen sind (vgl. Übung 2, Aufgabe 1), zu einer Horn-Formel äquivalent ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass φ ein minimales Modell hat und führen Sie dann eine Induktion über die Anzahl der in φ vorkommenden Aussagenvariablen. Betrachten Sie dazu für eine Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, deren Modelle unter Schnitt abgeschlossen sind, für jedes $i = 1, \ldots, n$ die Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_{i-1}, 1, X_{i+1}, \ldots, X_n)$.