

6. Übung Mathematische Logik

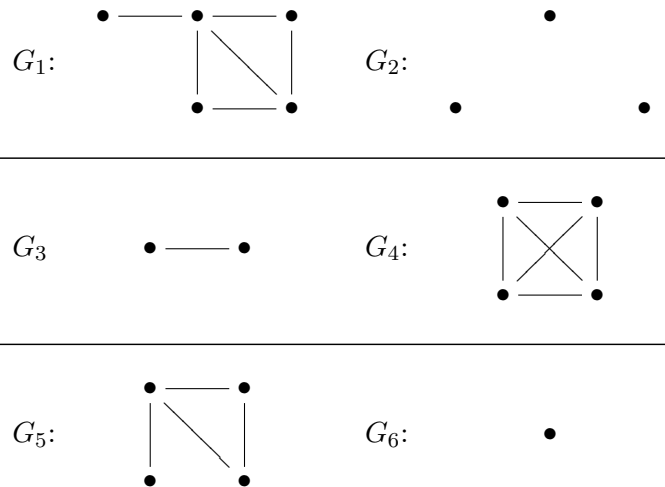
Abgabe: bis Donnerstag, den 29.5. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

5*2 Punkte

Wir betrachten die folgenden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$:



Bestimmen Sie jeweils, in welchen dieser Graphen die folgenden FO-Sätze gelten:

- (a) $\forall x \forall y \neg (Exy \wedge x = y)$;
- (b) $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$;
- (c) $\exists x \exists y \exists z (Exy \wedge Eyz \wedge Ezx)$;
- (d) $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$;
- (e) $\exists x \forall y \neg Exy$.

Aufgabe 2

5*2 Punkte

Die Arithmetik ist die τ_{ar} -Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ (mit der natürlichen Interpretation von $+$, \cdot , 0 und 1). Geben Sie jeweils eine Formel $\varphi(x, y) \in \text{FO}(\tau_{ar})$ an, so dass $\mathfrak{N} \models \varphi(a, b)$ gdw. das Paar $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) a teilt b ;
- (b) a ist eine Primzahl;
- (c) a und b sind teilerfremd;
- (d) a ist eine Zweierpotenz;
- (e) Die Binärdarstellungen von a und b haben die gleiche Länge.

Aufgabe 3

4+2+4 Punkte

Sei τ eine Signatur und $\varphi(x, y_1, \dots, y_k) \in \text{FO}(\tau)$ eine Formel über dieser Signatur.

- (a) Definieren Sie die Konstrukte $\exists^{\geq n} x \varphi$ und $\exists^=n x \varphi$ (es existieren mindestens bzw. genau n Elemente x , die φ erfüllen), indem Sie jeweils eine äquivalente FO-Formel angeben.
- (b) Sei nun $k = 1$. Schreiben Sie einen Satz $\vartheta \in \text{FO}(\tau)$, der genau dann in einer τ -Struktur \mathfrak{A} gilt, wenn genau ein Paar $(a, b) \in A^2$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$.
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass ϑ zu einem der folgenden Sätze äquivalent ist:

$$\exists^=1 x \exists^=1 y \varphi(x, y); \qquad \exists^=1 y \exists^=1 x \varphi(x, y).$$