Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 5.6. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 5*2 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie jeweils ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an:

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \;:\; \{f(a) : a \in A\}$ ist unendlich$\}$,

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \;:\; |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42\}$,

(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \;:\; |\{f^n(a) \;:\; n \in \mathbb{N}\}| \leq 13$ für alle $a \in A\}$

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \;:\; f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \{(A, f) \;:\; A$ ist endlich, und f ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$,

Aufgabe 2 4+2+4 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur (d.h. τ enthält keine Funktionssymbole), und sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots$ eine *Kette* von τ-Strukturen. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$, so dass $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie folgt:

$$A_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \,,$$
$$R^{\mathfrak{A}_\omega} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n} \quad \text{für alle Relationssymbole } R \in \tau.$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Sätze der Form $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta \in \mathrm{FO}(\tau)$ (mit quantorenfreiem η) *unter Vereinigung von Ketten abgeschlossen sind*, d.h. wenn $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie, dass (a) nicht für beliebige Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt.

(c) Sei $\mathcal{K}$ die Modellklasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element enthalten. Geben Sie ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ kein Axiomensystem aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots \exists y_s \eta$ (mit quantorenfreiem η) besitzt.

Aufgabe 3 8+2 Punkte

Seien R und S zweistellige sowie T ein dreistelliges Relationssymbol, und sei h ein dreistelliges, g ein zweistelliges, f ein einstelliges sowie c ein nullstelliges Funktionssymbol.

(a) Wandeln Sie die folgenden Formeln zunächst in Negations- und dann in Pränex-Normalform um:

(i) $\varphi_1 := \forall y (fy \neq x \rightarrow \exists z \forall x (Rxy \rightarrow \forall y Sfzfy))$

(ii) $\varphi_2 := \forall x \exists y (Sxy \land \forall y (\forall z (fz = w) \rightarrow \forall z (Rxy \land Syz))) \rightarrow Txzw.$

(b) Geben Sie für die Formel $\varphi := hggcxxhfcgxgcxcx = x$ eine äquivalente termreduzierte Formel an.