Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 12.6. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 2+6+2 Punkte

Seien im folgenden R und S zweistellige Relationssymbole und σ eine relationale Signatur.

(a) Wandeln Sie die folgende Formel ψ in Skolem-Normalform um:

$$\psi := \exists x \exists y (\neg Rxy \rightarrow \forall y \exists z (Sxy \wedge (y = z \vee Ryz)))\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ der Gestalt

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta$$

über einer relationalen Signatur $\tau \supseteq \sigma$ mit quantorenfreiem η existiert, so dass ψ genau dann ein Modell mit Universum A hat, wenn φ ein Modell mit Universum A hat (*relationale Skolem-Normalform*).

(c) Wandeln Sie die Formel ψ aus (a) in relationale Skolem-Normalform um.

Aufgabe 2 4+6 Punkte

(a) Sei $\varphi = \forall x Rxfx$ (mit einem zweistelligen Relationssymbol R und einem einstelligen Funktionssymbol f). Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von φ, so gibt es eine abzählbare Substruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{A}$, so dass die Menge $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ induziert.

(b) Zeigen Sie: Jeder erfüllbare FO-Satz φ hat ein abzählbares Modell.

Hinweis: Betrachten Sie die Skolem-Normalform von φ, und führen Sie eine ähnliche Konstruktion wie in (a) durch.

Aufgabe 3 6+4 Punkte

Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0,1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x \big(x + x = x \rightarrow \exists y (x + y = y \wedge x \cdot y = x)\big).$$

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.