Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 3.7. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein nicht-deterministischer endlicher Automat mit Zustandsmenge Q, Alphabet Σ, Anfangszustand $q_0 \in Q$, Transitionsrelation $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ und Endzustandsmenge $F \subseteq Q$. Zeigen Sie, dass ein Satz $\varphi \in \mathrm{MSO}(<, (P_a)_{a\in\Sigma})$ existiert, so dass ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann von $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, wenn $\mathfrak{B}(w) \models \varphi$ gilt.

Erinnerung: Zu einen Wort $w = w_0 \dots w_{n-1} \in \Sigma^*$ definieren wir die *Wortstruktur* $\mathfrak{B}(w) = (\{0, \dots, n-1\}, <, (P_a)_{a\in\Sigma})$ durch $P_a := \{i < n : w_i = a\}$.

Hinweis: Benutzen Sie Mengenvariablen X_q, $q \in Q$, um einen Lauf von $\mathcal{A}$ zu kodieren.

Aufgabe 2 8+2 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur und $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur.

(a) Zeigen Sie, dass die Strukturklasse $\{\mathfrak{B} : \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$ endlich axiomatisierbar ist.

(b) Folgern Sie aus (a): Ist $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, so gilt schon $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Aufgabe 3 5*2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) die Menge aller Primpotenzen in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, +)$;

(c) die Addition in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(d) jede Teilmenge $\emptyset \subsetneq M \subsetneq \mathbb{Q}$ in $(\mathbb{Q}, \leq)$;

(e) die Menge $\{0, 1\}$ in $(\{0, 1\}^*, \preceq)$;