

## 12. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 10.7. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

### Aufgabe 1

5\*2 Punkte

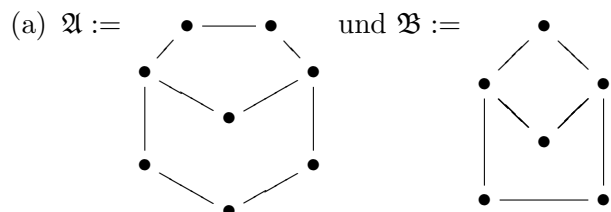
Welche der folgenden Theorien sind vollständig ?

- (a) die Theorie der planaren, ungerichteten Graphen;
- (b) die Theorie der dichten linearen Ordnungen;
- (c) die Theorie der endlichen Mengen;
- (d) die Theorie der abzählbar unendlichen Mengen;
- (e) die Theorie der Strukturen  $(\mathbb{N}, f)$  mit einer bijektiven Funktion  $f$ .

### Aufgabe 2

4\*3 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl  $m$  mit  $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$  oder beweisen Sie, dass  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ . Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang  $m$  an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  und  $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .



- (b)  $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  und  $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}\{0, 1\}, \subseteq)$  (Potenzmengen von  $\mathbb{N}$  und  $\{0, 1\}$ );
- (c)  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M)$  und  $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M)$ , wobei  $M$  der Graph der Multiplikation ist;
- (d)  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q}, <)$  und  $\mathfrak{B} := (\mathbb{R}, <)$ .

### Aufgabe 3

4\*2 Punkte

(a) Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

- (i)  $\varphi(c) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$ , wobei  $c$  nicht in  $\varphi$  vorkommt;
- (ii)  $\forall x \exists y (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \forall x \exists y \varphi \wedge \forall x \exists y \psi$ .

(b) Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

- (i)  $\frac{\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \Rightarrow \Delta}$  ;
- (ii)  $\frac{\Gamma, \exists x \psi \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi}{\Gamma, \forall x \psi \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi}$ .