Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

13. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.7. um 15:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Alle Aufgaben dieser Übung sind Zusatzaufgaben!

Aufgabe 1* $4^*+3^*+3^*$ Punkte

Geben Sie Axiomensysteme für die folgenden Strukturklassen an:

(a) Die Klasse aller zu $(\{0,1\}^*, s_0, s_1, \preceq)$ elementar äquivalenten Strukturen, wobei $s_0(x) = x0$, $s_1(x) = x1$ und

$$x \preceq y \iff \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } y = xz$$

für alle $x, y \in \{0,1\}^*$.

(b) Die Klasse aller partiellen Ordnungen $(A, \prec)$, die jede endliche lineare Ordnung als Substruktur enthalten.

(c) Die Klasse aller ungerichteten Wälder, d. h. die Klasse aller ungerichteten Graphen, welche keinen Kreis enthalten.

Aufgabe 2* 10^* Punkte

Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein (endliches) Axiomensystem an.

(a) Die Klasse aller unendlichen linearen Ordnungen;

(b) Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen;

(c) Die Klasse aller unendlichen dichten linearen Ordnungen;

(d) Die Klasse aller Graphen, die einen zu $(\mathrm{Pot}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ isomorphen Subgraphen enthalten;

(e) Die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Aufgabe 3* 5^*+5^* Punkte

Beweisen Sie, dass die folgenden Klassen von Strukturen nicht FO-axiomatisierbar sind.

(a) Die Klasse aller *endlich verzweigten* ungerichteten Graphen.

(Ein Graph $G = (V, E)$ ist endlich verzweigt, wenn zu jedem $v \in V$ nur endlich viele $w \in V$ mit $(v, w) \in E$ existieren.)

(b) Die Klasse aller *archimedischen* Körper.

(Ein linear geordneter Körper $\mathfrak{K} = (K, +, \cdot, 0, 1, <)$ heißt archimedisch, wenn zu jedem $a \in K$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ existiert.)

Hinweis: Verwenden Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 4* 8*+2* Punkte

(a) Zeigen Sie anhand von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein endlicher ungerichteter Zyklus $\mathfrak{C}_m = (C, E)$ existiert, so dass $\mathfrak{C}_m \equiv_m \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{P} = (\mathbb{Z}, E)$ mit $E := \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; : \; |i-j| = 1\}$ einen unendlich langen ungerichteten Pfad bezeichnet.

(b) Folgern Sie, dass die Klasse aller ungerichteten Wälder nicht endlich axiomatisierbar ist.