Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2008

Probeklausur Mathematische Logik

Aufgabe 1

(a) Es gelte $\Phi \models \varphi$. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein
Für alle Teilmengen $\Psi \subseteq \Phi$ gilt $\Psi \models \varphi$.	☐	☐
Für alle Obermengen $\Psi \supseteq \Phi$ gilt $\Psi \models \varphi$.	☐	☐
Es gibt eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar ist.	☐	☐

(b) Sei Φ eine abzählbare und erfüllbare Satzmenge. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein
Φ hat ein endliches Modell.	☐	☐
Φ hat ein abzählbares Modell.	☐	☐
Φ hat ein überabzählbares Modell.	☐	☐
Alle Modelle von Φ sind elementar äquivalent.	☐	☐

(c) Seien φ und ψ aussagenlogische Formeln, so dass $\varphi \vee \psi$ unerfüllbar ist. Treffen folgende Aussagen immer zu?

	ja	nein
Sowohl φ als auch ψ sind unerfüllbar.	☐	☐
$\varphi \wedge \psi$ ist unerfüllbar.	☐	☐
$\varphi \rightarrow \psi$ ist eine Tautologie.	☐	☐
$\psi \rightarrow \varphi$ ist unerfüllbar.	☐	☐

(d) Welche der folgenden Sätze gelten in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$?

	ja	nein
$(\exists x \forall y\ y \subsetneq x \vee y = x) \wedge (\exists y \forall x\ y \subsetneq x \vee y = x)$	☐	☐
$\exists x \exists y (\neg x \subsetneq y \wedge \neg y \subsetneq x)$	☐	☐
$\forall x \forall y (x \subsetneq y \rightarrow \exists z (x \subsetneq z \wedge z \subsetneq y))$	☐	☐
$\forall x \forall y \forall z (x \subsetneq y \wedge y \subsetneq z \rightarrow x \subsetneq z)$	☐	☐

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgende Folgerung gilt:

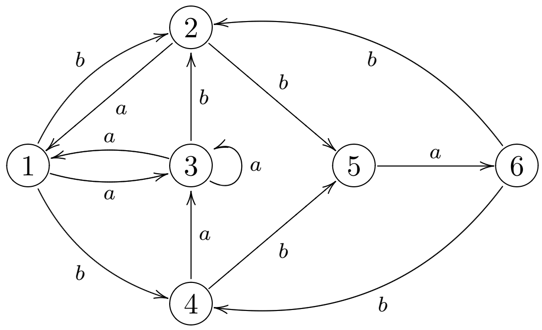
$$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow 0) \wedge (U \wedge Z \rightarrow Y) \wedge (X \vee Y \vee Z) \models (X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge \neg U)$$

(b) Eine aussagenlogische Formel φ *koppelt* die Variablen X und Y, falls für jedes Modell $\mathfrak{I}$ von φ gilt: $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(Y)$. Zeigen Sie, wie man mittels der Resolutionsmethode nachweisen kann, dass eine Formel φ die Variablen X und Y koppelt.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass bei der Resolution von Hornklauseln eine Nicht-Hornklausel entstehen kann.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E_a, E_b)$:



(a) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten, ob $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}, v$ gilt. Falls dies nicht gilt, bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}, v$ und geben sie eine trennende ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt: $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v \not\models \varphi$.

Hinweis: Es reicht Knotenpaare u, v mit $u < v$ zu betrachten.

(b) Geben Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}$ an.

(c) Geben Sie jeweils eine Formel in ML und FO($\{E_a, E_b\}$) an, welche die Menge $\{1, 3, 5\}$ definiert.

Aufgabe 4

Wir betrachten folgende Strukturen:

$$\mathfrak{A}_1 := (\{0,1\}, \cdot\,); \qquad \mathfrak{A}_3 := (\mathbb{R}, \cdot\,);$$
$$\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Q}, \cdot\,); \qquad \mathfrak{A}_4 := (\mathbb{C}, \cdot\,).$$

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i$ einen Satz $\varphi_i \in \mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen Strukturen trennt, d. h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie die Definierbarkeit der folgenden Relationen:

(a) Die Menge der ungeraden Zahlen in $(\mathbb{N}, +)$;

(b) Die Menge der 2er-Potenzen in $(\mathbb{N}, \cdot\,)$;

(c) Die Menge der Primpotenzen in $(\mathbb{N}, \cdot\,)$;

(d) Die Menge der ganzen Zahlen in $(\mathbb{Q}, +)$;

(e) Die Ordnung $\leq$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Strukturklassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar?

(a) die Klasse aller linearen Ordnungen;

(b) die Klasse aller abzählbaren Mengen;

(c) die Klasser aller zu $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorphen Strukturen;

(d) die Klasse aller endlichen Mengen;

(e) die Klasse aller unendlichen Gruppen.