Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

1. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Donnerstag, den 30.04. um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 2 + 2 + 3 + 3 Punkte

Untersuchen Sie, ob folgende Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind:

(i) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \vee Y)$,

(ii) $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow Y$,

(iii) $(X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg(X \wedge Y)$,

(iv) $(\neg X \wedge (X \vee Y)) \leftrightarrow (X \vee \neg Y)$.

Aufgabe 2 5 + 5 Punkte

(a) Eine AL-Formel heißt *kontingent* wenn sie erfüllbar aber keine Tautologie ist. Gibt es kontingente Formeln, deren Negation nicht kontingent ist?

(b) Sei $f \in B^3$ eine Boolsche Funktion, für die gilt:

$$f(x, \neg x, x) = f(x, 0, 0) = 1 \text{ und}$$
$$f(x, x, \neg x) = f(x, 1, 1) = 0.$$

Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist, geben Sie eine AL-Formel $\varphi(X_1, X_2, X_3)$ an, die f definiert, und zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{f\}$ funktional vollständig ist, d.h. man kann aus f alle Booleschen Funktionen mit Hilfe von Komposition konstruieren.

Aufgabe 3 3 + 4 + 3 Punkte

(a) Konstruieren Sie eine Formel $\varphi(X_0, X_1, X_2)$, so dass für alle dazu passenden Interpretationen $\mathfrak{I} : \{X_0, X_1, X_2\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt, dass sich durch Ändern genau eines Wahrheitswertes $\mathfrak{I}(X_i)$ ($i \in \{0, 1, 2\}$) auch der Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$ ändert.

(b) Kann $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ mit der Eigenschaft aus (a) so gewählt werden, dass $\{h_\varphi\}$ funktional vollständig ist? Dabei ist h_φ die Funktion, die durch die Formel φ definiert ist.

(c) Geben Sie für jedes n eine Formel $\varphi_n(X_0, \ldots, X_{n-1})$ mit der Eigenschaft aus (a) an.