

2. Übung Mathematische Logik

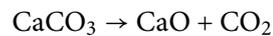
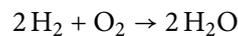
Abgabe: bis 07.05.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

5 + 5 Punkte

In einem Chemielabor stehen die Apparaturen zur Verfügung, um folgende chemische Reaktionen durchzuführen:



Ferner sind in dem Labor folgende Grundstoffe vorhanden: H_2 , O_2 , CaCO_3 , NaCl und NH_3 .

- Geben Sie eine Formalisierung in AL für die oben beschriebenen Sachverhalte an.
- Beweisen Sie (durch geeignete Anwendung des Erfüllbarkeitsalgorithmus für Hornformeln), dass es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, Na_2CO_3 herzustellen.

Aufgabe 2

4 + 3 + 3 Punkte

Für aussagenlogische Formeln φ und ψ schreiben wir $\varphi \leq \psi$ genau dann, wenn $\varphi \rightarrow \psi$ eine Tautologie ist. Weiter sei $\varphi < \psi$ genau dann, wenn $\varphi \leq \psi$ und $\psi \not\leq \varphi$.

- Zeigen Sie, dass die so definierte Relation dicht ist, d.h. zu je zwei Formeln $\varphi < \psi$ existiert eine Formel ϑ mit $\varphi < \vartheta < \psi$.
Hinweis: Konstruieren Sie ϑ aus φ und ψ mittels einer Aussagenvariable, die weder in φ noch in ψ vorkommt.
- Zeigen Sie, dass eine unendliche aufsteigende Kette $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \dots$ existiert.
- Zeigen Sie, dass es für je zwei Formeln φ und ψ eine kleinste Formel ϑ gibt, so dass $\varphi \leq \vartheta$ und $\psi \leq \vartheta$, d.h. für alle Formeln η mit $\varphi \leq \eta$ und $\psi \leq \eta$ gilt auch $\vartheta \leq \eta$.

Aufgabe 3

10 Punkte

Sei Φ eine beliebige Menge aussagenlogischer Formeln. Eine Menge Ψ heisst Φ -*verwerfend*, wenn für alle Formeln $\varphi \in \text{AL}$ mit $\Phi \models \varphi$, gilt $\Psi \models \neg\varphi$. Zeigen Sie, dass jede Φ -verwerfende Menge Ψ äquivalent ist zu einer endlichen Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$, d.h. für alle $\psi \in \Psi$, gilt $\Psi_0 \models \psi$.