**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

# 4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 21.05.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

**Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.**

**Aufgabe 1** 3 + 3 + 4 Punkte

(a) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\begin{aligned}&(\neg X \lor Z \lor Y) \land (\neg Z \lor Y \lor \neg X)\\ &\land (Y \lor Z) \land (X \lor \neg Z) \land (\neg Y \lor Z \lor X)\\ &\land (\neg Y \lor \neg X) \land (\neg Y \lor Z \lor \neg X)\,.\end{aligned}$$

(b) Weisen Sie mit der Resolutionsmethode nach, dass die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(X \land Y) \lor (\neg X \land \neg Y \land Z) \lor (\neg X \land \neg Z) \lor (Y \land Z) \lor (X \land \neg Y)\,.$$

(c) Beweisen Sie die folgende semantische Folgerung an Hand der Resolutionsmethode:

$$\{X \lor Y \lor \neg V\,, V \lor X \lor Z\,, V \lor \neg Y \lor Z\,, Z \lor \neg Y \lor K\,, \neg Z \lor K\,, \neg X\} \vDash K \land \neg X\,.$$

**Aufgabe 2** 2 + 4 + 4 Punkte

(a) Zwei Formeln $\varphi$ und $\psi$ *schließen einander aus*, wenn es keine Interpretation gibt, welche beide Formeln erfüllt. Wie kann man mit der Resolutionsmethode prüfen, ob $\varphi$ und $\psi$ einander ausschließen?

(b) Zeigen Sie, dass sich die Erfüllbarkeit einer Klauselmenge $\mathcal{K}$ nicht ändert, wenn man aus $\mathcal{K}$ alle Klauseln ausschließt, die eine Variable enthalten, welche nur positiv oder nur negativ in $\mathcal{K}$ vorkommt.

(c) Verwenden Sie die Methoden aus (a) und (b), um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\varphi &:= (X \rightarrow (Y \lor Z)) \land (Z \rightarrow V) \land (Y \lor V) \land (Z \rightarrow (\neg X \lor V)) \text{ und}\\ \psi &:= ((Z \land \neg V) \rightarrow X) \land \neg(\neg V \lor \neg Z) \land (X \rightarrow (V \lor Z)) \land (V \lor \neg X \lor \neg Y)\\ &\quad \land ((\neg V \land \neg X) \rightarrow (Y \lor Z))\end{aligned}$$

einander nicht ausschließen.

**Aufgabe 3** 5 + 5 Punkte

Ein *Dominosystem* besteht aus einer endlichen Menge von quadratischen Dominosteinen gleicher Größe, deren vier Kanten (oben, unten, links, rechts) gefärbt sind. Eine *Parkettierung* der Ebene (oder eines Teils davon) ist eine vollständige Überdeckung mit Dominosteinen, ohne Lücken und Überlappungen, so daß aneinandergrenzende Kanten dieselbe Farbe tragen. (Rotation der Steine ist nicht erlaubt.)

(a) Konstruieren Sie zu einem gegebenen Dominosystem $D$ eine Formelmenge $\Phi(D)$, welche genau dann erfüllbar ist, wenn eine Parkettierung der Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $D$ existiert.

(b) Sei $D$ ein Dominosystem. Beweisen Sie, dass man mit $D$ auch die gesamte Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parkettieren kann, wenn man mit $D$ beliebig große endliche Quadrate $n \times n$ parkettieren kann.

**Aufgabe 4** 3 + 3 + 4 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

(a) $(X \lor Y),\ (X \to (Y \land Z)) \ \Rightarrow\ Y,\ \neg Z;$

(b) $(X \to Z),\ (Y \to Z) \ \Rightarrow\ X,\ Y,\ \neg Z.$

Überprüfen Sie durch geeignete Anwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Sequenz gültig ist:

(c) $((\neg X \land Y) \to \neg Z),\ (Y \to Z) \ \Rightarrow\ (\neg X \lor \neg Y) \to Z.$