

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 28.05.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

2 + 4 + 4 Punkte

Bei der *Einheitsresolution* beschränkt man sich auf Ableitungen, bei denen in jedem Resolutionsschritt eine der Klauseln genau ein Literal enthält.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Einheitsresolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \rightarrow W) \wedge (Z \wedge U \rightarrow Y) \wedge (Z \wedge V \rightarrow W) \wedge \neg(U \rightarrow X) \\ \wedge (Y \wedge Z \wedge U \rightarrow V) \wedge (Y \wedge Z \wedge W \rightarrow X) \wedge (U \rightarrow Z)$$

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die Einheitsresolution im Allgemeinen, d. h. für nicht Horn-Formeln, nicht vollständig ist.

(c) Geben Sie eine unerfüllbare Klauselmengenan, für die eine Ableitung der leeren Klausel zwar mit der Einheitsresolution möglich ist, für welche aber jede solche Ableitung länger ist, als die kürzeste Ableitung der leeren Klausel mit der normalen Resolutionsmethode. Die Länge einer Ableitung sei dabei die Anzahl der durchgeführten Resolutionsschritte.

Aufgabe 2

5 + 5 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

- (a) $X \wedge \neg Y, X \rightarrow (\neg Z \vee Y) \Rightarrow \neg X \vee Y, Z$;
(b) $X \rightarrow (Y \wedge \neg Z), X \rightarrow (Y \vee \neg Z), Z \rightarrow (\neg Y \vee X), Y \Rightarrow X, \neg Z$.

Aufgabe 3

5 + 5 Punkte

Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für folgende Sequenzen:

- (a) $((X \wedge Y) \rightarrow (Y \wedge Z)), Z \rightarrow (X \wedge Y) \Rightarrow X \wedge Y, Z$;
(b) $(X \wedge \neg Y) \rightarrow \neg Z, \neg X \vee Y \Rightarrow X, \neg Y$.

Aufgabe 4

4 + 4 + 3 Punkte

Eine Schlussregel ist korrekt, wenn (für jede Wahl von $\Gamma, \Delta, \psi, \varphi, \dots$) die Gültigkeit aller Prämissen die Gültigkeit der Konklusion impliziert. Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln:

$$(a) \frac{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta, \neg\psi \quad \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi, \vartheta}$$

$$(b) \frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\vartheta \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)}$$

$$(c) \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$