Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 12.06.2009 um 10:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 3 + 4 + 3 Punkte

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (wir schreiben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn

(1) $A \subseteq B$,

(2) für alle $n \in \mathbb{N}$ und $R \in R^n(\tau)$ gilt $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ und

(3) für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in F^n(\tau)$ gilt $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}}|_A$, d. h. $f^{\mathfrak{A}}$ ist die *Restriktion* von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A.

Sei weiterhin $\mathfrak{B}$ eine Struktur und $M \subseteq B$ eine Teilmenge des Universums. Die von M *erzeugte* Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist die kleinste Struktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit $M \subseteq A$.

Betrachten Sie die Boolesche Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{BA}(\mathbb{N}) = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, \mathbb{N}).$$

Welche Substrukturen werden von folgenden Teilmengen erzeugt?

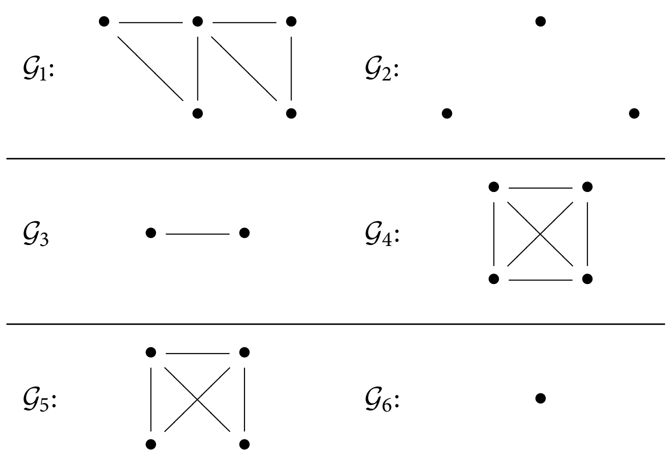
(a) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(b) Die Menge aller unendlichen Intervalle $(n, \infty) = \{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}$.

(c) Die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement ebenfalls unendlich ist.

Aufgabe 2 2 + 2 + 3 + 3 Punkte

Wir betrachten folgende Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



Bestimmen Sie, in welchen dieser Graphen folgende Sätze jeweils gelten:

$\varphi_1 := \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 = x_3)$;

$\varphi_2 := \forall x \exists y (x = y)$;

$\varphi_3 := \exists x \exists y \forall z (\neg(x = z) \land \neg(y = z) \to Exz \land Eyz)$;

$\varphi_4 := \forall x \forall y \forall z (Exy \lor Exz \lor Eyz)$.

Aufgabe 3 3 + 3 + 4 Punkte

Sei $\mathcal{K} := (S, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem (s. Skript, Kap. 2, S. 42). Geben Sie FO-Formeln an, welche ausdrücken, dass

(a) x keinen b-Vorgänger hat, an dem gleichzeitig Q und P gelten;

(b) es zwischen x und y einen b-Pfad der Länge höchstens 17 gibt, auf dem überall P gilt;

(c) von allen Zuständen, an denen $\neg P$ gilt, in maximal drei a-Schritten ein Zustand erreicht werden kann, an dem Q gilt.

Aufgabe 4 2 + 2 + 3 + 3 Punkte

Ein unendliches Wort über einem endlichen Alphabet Σ ist eine unendliche Folge $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\ldots$, so dass $\alpha(i) \in \Sigma$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller unendlichen Wörter über Σ bezeichnen wir mit Σ^ω. Jedes $\alpha \in \Sigma^\omega$ kann kann durch die *Wortstruktur* $\mathfrak{W}_\alpha = (\mathbb{N}, <, (P_a)_{a\in\Sigma})$ kodiert werden, wobei $P_a = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(i) = a\}$. Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\})$ definiert dann die *ω-Sprache* $L(\varphi) := \{\alpha \in \Sigma^\omega \mid \mathfrak{W}_\alpha \models \varphi\}$.

(a) Beschreiben Sie die durch folgende Sätze definierten ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

  (i) $\varphi_0 := \exists x \exists y (P_a x \land P_b y \land x < y)$;

  (ii) $\varphi_1 := \exists x \forall y (x < y \to \neg P_a y)$.

(b) Geben Sie FO-Sätze an, welche folgende ω-Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ definieren:

  (i) $\{(aab)^\omega\} = \{aabaab\ldots\}$;

  (ii) die Sprache der ω-Wörter über Σ, in denen auf jedes a unendlich viele b folgen.

Aufgabe 5* (8 + 2)* Punkte

Der (*geordnete*) *binäre Baum* ist die Struktur $\mathfrak{T} := (T, s_0, s_1)$ mit Universum $T := \{0,1\}^*$ und den Nachfolgerfunktionen $s_0(w) := w0$ und $s_1(w) := w1$.

Der *ungeordnete binäre Baum* kann als Struktur $\mathfrak{T}_\leq := (T, \leq)$ mit demselben Universum T und der Präfixordnung

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein Wort } z \in \{0,1\}^* \text{ mit } y = xz$$

kodiert werden.

(a) Welche der folgenden Mengen sind Universen einer Substruktur von $\mathfrak{T}$ oder $\mathfrak{T}_\leq$?

  (i) $A := \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

  (ii) $B := \{0110w \mid w \in \{0,1\}^*\}$

  (iii) $C := \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w| < 17\}$

  (iv) $D := \{u111w \mid u, w \in \{0,1\}^*\}$

(b) Das längste gemeinsame Präfix $x \sqcap y$ zweier Worte x und y ist das längste Wort $z \in \{0,1\}^*$ mit $z \leq x$ und $z \leq y$. Bestimmen Sie alle Substrukturen der Expansion $(T, s_0, s_1, \sqcap)$ von $\mathfrak{T}$ um die Funktion $\sqcap$.