Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 18.06.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte

Wir betrachten eine Expansion $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, R)$ der natürlichen Arithmetik mit einem einstelligen Relationssymbol R. Geben Sie zu folgenden Sachverhalten jeweils eine Formel in $\mathrm{FO}(\{+, \cdot, 0, 1, R\})$ an:

(a) $x + 1$ und $y + 1$ haben die gleichen Primfaktoren;

(b) die Primfaktorzerlegung von x enthält jede Primzahl höchstens ein Mal;

(c) die 17-te Ziffer von rechts der Binärdarstellung von x ist eine 0;

(d) $R^{\mathfrak{N}}$ ist unendlich;

(e) die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist unendlich.

Aufgabe 2 4 + 6 Punkte

Wir betrachten eine endliche Signatur τ.

(a) Sei $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ eine Menge von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen und

$$\Phi' := \{\varphi_0\} \cup \{ (\varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \rightarrow \varphi_n \ : \ n > 0 \}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Phi) = \mathrm{Mod}(\Phi')$.

(b) Eine Menge Φ von $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätzen heißt *glatt*, wenn keine Struktur mehr als einen Satz aus Φ verletzt, d.h. wenn für jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt $|\{\varphi \in \Phi \ : \ \mathfrak{A} \not\models \varphi\}| \leq 1$. Zeigen Sie, dass jede FO-axiomatisierbare Klasse von Strukturen auch ein glattes Axiomensystem hat.

Aufgabe 3 2 + 2 + 3 + 3 Punkte

Axiomatisieren Sie folgende Graphklassen in $\mathrm{FO}(\{E\})$:

(a) die Klasse aller gerichteten vollständigen Graphen mit mindestens 17 Knoten (ein gericheteter Graph ist vollständig, wenn es von jedem Knoten eine Kante zu jedem Knoten gibt, insbesondere sind Schlingen vorhanden);

(b) die Klasse der gerichteten Graphen, die keinen vollständigen Graphen der Größe höchstens 17 als Substruktur enthalten;

(c) die Klasse der gerichteten kreisfreien Graphen;

(d) die Klasse der gerichteten Graphen, die Kreise (geschlossene Pfade ohne Wiederholungen von Knoten) aller Längen enthalten.

Aufgabe 4 5 + 5 Punkte

Seien E und R zweistellige Relationssymbole und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Formen Sie folgende Formeln in Negations- und Pränexnormalform um.

(a) $\varphi := \exists x[\forall y(Exz \wedge \neg Eyx) \rightarrow \forall y(Efxyz \wedge \forall zRxz)]$.

(b) $\psi := [\exists z \forall x(\exists y(Exy \wedge Eyz) \wedge \forall y \forall z(Eyz \vee Exz \rightarrow y = z))] \rightarrow \forall z Exfyz$.