Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 25.06.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei R ein zweistelliges Relationssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Wandeln Sie die Formel

$$\varphi := \forall x \forall z \forall y \Big(\exists z(\neg Rgxz \lor Ryz) \land \neg\forall x\big(Rxz \lor \exists y(Ryx \land Rgygz)\big)\Big)$$

in Skolem-Normalform um.

Aufgabe 2 5 + 5 Punkte

Wir betrachten den Graphen $\mathcal{G} = (\{0,1,2\}, E)$ mit $E := \{(0,1),(1,2),(2,0),(0,0),(2,2)\}$ und die Formel

$$\varphi := \forall x\big(Exx \rightarrow \exists y(Eyx \land \neg Eyy)\big).$$

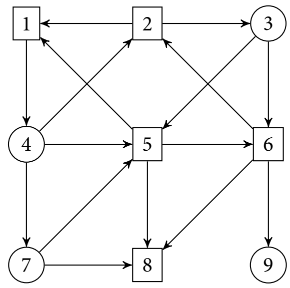
(a) Skizzieren Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathcal{G}, \varphi)$ an.

Hinweis: Führen Sie Abkürzungen ein!

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $\mathrm{MC}(\mathcal{G}, \varphi)$ an.

Aufgabe 3 5 + 5 Punkte

(a) Betrachten Sie folgenden Spielgraphen, in dem (i) eine Position von Spieler 0 und $\boxed{j}$ eine Position von Spieler 1 bezeichnet.



Bestimmen Sie für jeden Knoten, ob ein Spieler von dort aus eine Gewinnstrategie besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

(b) Geben Sie einen Spielgraphen an, in dem es Positionen gibt, von denen aus keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Aufgabe 4 4 + 6 Punkte

Ein Spiel kann man als Struktur $\mathfrak{G} = (V, V_0, V_1, E)$ darstellen, wobei V die Menge der Positionen, V_i die Menge der Positionen des Spielers i und E die Menge der möglichen Züge ist. Sei F ein zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie Formeln φ und $\psi(x)$ in $\mathrm{FO}(V_0, V_1, E, F)$ an, so dass

(a) $\mathfrak{G} \models \varphi$ genau dann, wenn eine Strategie f vom Spieler 0 existiert, so dass $F \subseteq E$ die Menge der Züge ist, die gemacht werden können, wenn Spieler 0 gemäß f spielt;

(b) $\mathfrak{G} \models \psi(v)$ genau dann, wenn von v aus keiner der Spieler eine Strategie hat, um in höchstens 3 Zügen zu gewinnen.