Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 02.07.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 3 + 3 + 4 Punkte

Sei $\mathcal{K} := (V, E_a, E_b, P, Q)$ ein Transitionssystem. Geben Sie Formeln in der Modallogik an, welche ausdrücken, dass

(a) es einen b-Pfad der Länge höchstens 3 gibt, welcher an einem Zustand endet, wo P gilt, und in jedem Zustand des Pfades $\neg Q$ gilt,

(b) alle Pfade der Länge 3, an denen überall P gilt, einen Zustand enthalten, an dem Q gilt;

(c) auf allen Pfaden der Länge 3, die mit einem Zustand enden, an dem Q gilt, es einen Zustand gibt, auf dem P gilt.

Aufgabe 2 4 + 6 Punkte

Seien $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ und $\mathcal{K}' = (V', (E'_a)_{a\in A}, (P'_i)_{i\in I})$ zwei Kripkestrukturen. Eine Relation $Z \subseteq V \times V'$ heißt *Simulation* von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$, falls für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

- $v \in P_i \Rightarrow v' \in P'_i$ für alle $i \in I$ und
- für alle $w \in V$ mit $(v, w) \in E_a$ gibt es ein $w' \in V'$ mit $(v', w') \in E'_a$ und $(w, w') \in Z$ für alle $a \in A$.

(a) Beschreiben Sie ein Spiel $\mathcal{G}(\mathcal{K}, v, \mathcal{K}', v')$ zwischen dem Spieler I und Spieler II auf Transitionssystemen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ mit der Anfangsposition (v, v'), in dem Spieler II genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn es eine Simulation von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ gibt, die das Paar (v, v') enthält.

(b) Sei Z eine Simulation von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ und Z' eine Simulation von $\mathcal{K}'$ nach $\mathcal{K}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann eine *Bi*simulation Z^* von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ existiert.

Aufgabe 3 3 + 3 + 4 Punkte

Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine äquivalente Formel der Modallogik an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(i) $\varphi_1 := \exists y \forall z (Exy \land \neg Py \land (Eyz \rightarrow Pz))$;

(ii) $\varphi_2 := \forall y (Exy \rightarrow Eyx)$;

(iii) $\varphi_3 := Px \rightarrow \Big(\forall y\big(Exy \rightarrow (\exists z(Ezy \land Pz)) \land (\exists z(Eyz \land Pz))\big)\Big)$.