Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, R. Rabinovich

SS 2009

11. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis 16.07.2009 um 13:30 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 $2 + 4 + 4^*$ Punkte

(a) Sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller gerichteten Graphen (V, E) ohne Kreise gerader Länge.

(i) Axiomatisieren Sie die Klasse $\mathcal{K}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen aus $\mathcal{K}$, in denen jeder Knoten, der keinen Vorgänger hat unendlich viele direkte Nachfolger hat, FO-axiomatisierbar ist. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass diese Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b)* Zeigen Sie, dass die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist. Eine lineare Ordnung ist diskret, wenn jedes Element a, das Nachfolger (Vorgänger) hat, auch einen kleinsten (größten) Vorgänger (Nachfolger) b hat, d.h. für kein c gilt $a < c < b$ ($b < c < a$).

Aufgabe 2 3 + 4 + 3 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind:

(a) die Menge der Primzahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die lexikographische Ordnung in $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, +, P_1, P_2)$, wobei + die elementenweise Addition ist, $P_1 = \{(0, a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ und $P_2 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Dabei ist die lexikographische Ordnung definiert als $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a < c)$ oder $(a = c$ und $b < d)$.

(c) die Menge der geraden Zahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$.

Aufgabe 3 3 + 3 + 4 Punkte

Welche der folgenden Theorien sind vollständig ?

(a) die Theorie der (ungerichteten) Wälder;

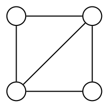
(b) die Theorie der nicht-reflexiven dichten Ordnungen mit mindestens zwei Elementen (eine Ordnung $<$ ist dicht, wenn $x < y$ die Existenz eines z impliziert mit $x < z < y$);

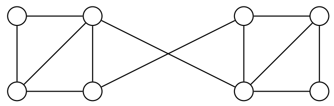
(c) die Theorie der unendlichen Mengen.

Aufgabe 4 3 + 3 + 4 Punkte

Bestimmen Sie die kleinste Zahl m mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass eine solche Zahl nicht existiert. Geben Sie jeweils eine Gewinnstrategie für Herausforderer bzw. Duplikatorin im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bzw. $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ oder im Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.

(a) $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$





(b) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, +, \{5\}, \{7\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, +, \{5\}, \{11\})$, wobei $+$ der Graph der Addition (also eine Relation) ist;

(c) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, |, \{11\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, |, \{13\})$.

Aufgabe 5* 10* Punkte

(a) Zeigen Sie anhand von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein endlicher ungerichteter Zyklus $\mathfrak{C}_m = (C, E)$ existiert, so dass $\mathfrak{C}_m \equiv_m \mathfrak{P}$, wobei $\mathfrak{P} = (\mathbb{Z}, E)$ mit $E := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |i - j| = 1\}$ einen unendlich langen ungerichteten Pfad bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die Klasse aller ungerichteten Wälder nicht endlich axiomatisierbar ist.