Aufgabe 1

(a) Prüfen Sie mit Hilfe des Erfüllbarkeitstests aus der Vorlesung, ob folgende Formeln erfüllbar sind:

(i)

$$\begin{gathered}(A \wedge B \wedge C \to 0) \wedge (C \wedge D \to E)\\ \wedge (A \wedge D \wedge E \to F) \wedge (1 \to D)\\ \wedge (D \to C) \wedge (C \wedge E \to A) \wedge (F \wedge D \wedge E \to B),\end{gathered}$$

(ii)

$$\begin{gathered}(A \wedge B \wedge C \to 0) \wedge (B \wedge D \to F)\\ \wedge (A \wedge F \to D) \wedge (B \wedge C \wedge E \to F)\\ \wedge (1 \to K) \wedge (1 \to L) \wedge (D \wedge K \wedge L \to 0).\end{gathered}$$

(b) Zu zwei aussagenlogischen Interpretationen $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ über dem gleichen Definitionsbereich σ definieren wir eine neue Interpretation $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 : \sigma \to \{0,1\}$ durch

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X)) .$$

Zeigen Sie, dass für jede Horn-Formel φ der Schnitt zweier Modelle wieder ein Modell ist, d.h. wenn $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \models \varphi$.

(c) Verwenden Sie (b) um zu zeigen, dass jede der folgenden Formeln nicht äquivalent zu einer Horn-Formel ist:

(i) $X \to (Y \vee Z)$;

(ii) $(X \to (Y \vee Z)) \wedge (\neg X \wedge \neg Y \to Z)$.

Aufgabe 2

Sei $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $\Phi \cup \Psi \models \varphi \wedge \psi$,

(b) $\Phi \cap \Psi \models \varphi \vee \psi$,

(c) $\Phi \models \varphi \to \psi$,

(d) $\Psi \models \varphi \to \psi$.