Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- Wenn $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$, dann ist Φ unerfüllbar.
- Wenn Φ unerfüllbar ist, dann gilt $\Phi \models \psi$ für alle Formeln $\psi \in \mathrm{AL}$.
- $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \models (\psi \vee \varphi)$.
- $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$.

Aufgabe 2

Ein ungerichteter Graph heißt *bipartit*, wenn seine Knotenmenge in zwei Mengen L und R zerfällt, so dass jede Kante einen Knoten von L mit einem Knoten von R verbindet.

Beweisen Sie durch Anwendung des Kompaktheitssatzes, dass ein (möglicherweise unendlicher) Graph G genau dann bipartit ist, wenn jeder endliche (knoteninduzierte) Teilgraph von G bipartit ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Spiel, in dem jeder Spieler, wenn er am Zug ist, nur endlich viele Zugmöglichkeiten hat. Beweisen Sie, dass es in einem solchen Spiel beliebig lange endliche Partien nur dann geben kann, wenn es auch unendliche Partien gibt. Mit anderen Worten, es muss einer der folgenden Sachverhalte zutreffen:

(a) entweder gibt es unendlich lange Partien,

(b) oder es gibt eine feste Schranke n, so dass keine Partie länger als n Züge dauern kann.