Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

7. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 16.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Geben Sie jeweils ein (wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Klassen von Strukturen an:

(a) $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \ : \ \{f(a) : a \in A\} \text{ ist unendlich}\}$.

(b) $\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \ : \ |A \setminus \{f(a) : a \in A\}| = 42\}$.

(c) $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \ : \ |\{f^n(a) \ : \ n \in \mathbb{N}\}| \leq 13 \text{ für alle } a \in A\}$.
Dabei bezeichnet $f^n : A \to A$ die n-fach iterierte Anwendung von f.

(d) $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \ : \ f \text{ ist injektiv aber nicht surjektiv}\}$,

(e) $\mathcal{K}_5 := \{(A, f) \ : \ A \text{ ist endlich und } f \text{ ist injektiv aber nicht surjektiv}\}$,

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei φ ein FO(τ)-Satz. Das *Spektrum von* φ ist definiert als

$$\mathrm{spec}(\varphi) := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \text{ex. } \tau\text{-Struktur } \mathfrak{A} \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ und } |A| = n\}.$$

Da das Universum einer Struktur stets nichtleer ist, betrachten wir ausschließlich Mengen $A \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Spektren.

(a) Zeigen Sie:
   (i) $\emptyset$ und $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind jeweils das Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes.
   (ii) Jede endliche Menge ist Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes.
   (iii) Jede co-endliche Menge ist Spektrum eines FO($\emptyset$)-Satzes. Dabei heißt eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ co-endlich, wenn das Komplement $\mathbb{N} \setminus A$ von A endlich ist.

(b) Geben Sie einen Satz über einer geeigneten Signatur τ an, dessen Spektrum die Menge der geraden Zahlen ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass es erfüllbare Sätze φ mit $\mathrm{spec}(\varphi) = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 3 10 Punkte

Seien R und S zweistellige sowie T ein dreistelliges Relationssymbol, und sei h ein dreistelliges, g ein zweistelliges, f ein einstelliges sowie c ein nullstelliges Funktionssymbol.

(a) Wandeln Sie die folgenden Formeln zunächst in Negations- und dann in Pränex-Normalform um:
   (i) $\varphi_1 := \forall y(fy \neq x \to \exists z \forall x(Rxy \to \forall y Sfzfy))$
   (ii) $\varphi_2 := \forall x \exists y(Sxy \land \forall y(\forall z(fz = w) \to \forall z(Rxy \land Syz))) \to Txzw$.

(b) Sei $\varphi := \forall x((ghcccx = x) \land (ghcccfffx = x))$. Was sagt diese Formel über die Funktion f aus? Geben Sie eine zu φ äquivalente termreduzierte Formel an.