Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

8. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 23.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Seien im folgenden R und S zweistellige Relationssymbole und σ eine relationale Signatur.

(a) Wandeln Sie die folgende Formel ψ in Skolem-Normalform um:

$$\psi := \exists x \exists y (\neg Rxy \rightarrow \forall y \exists z (Sxy \wedge (y = z \vee Ryz)))\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ der Gestalt

$$\varphi = \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta$$

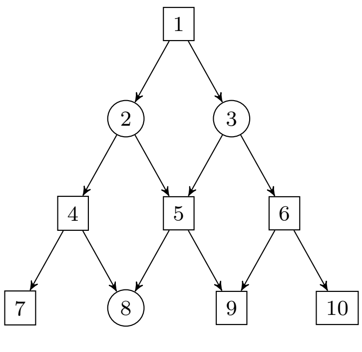
über einer relationalen Signatur $\tau \supseteq \sigma$ mit quantorenfreiem η existiert, so dass ψ genau dann ein Modell mit Universum A hat, wenn φ ein Modell mit Universum A hat (*relationale Skolem-Normalform*).

(c) Wandeln Sie die Formel ψ aus (a) in relationale Skolem-Normalform um.

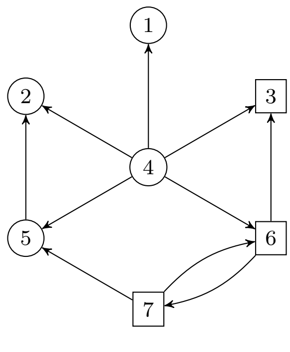
Aufgabe 2

10 Punkte

Wir betrachten folgende Spielgraphen (eingekreiste Knoten gehören Spieler 0).



$\mathcal{G}_1$



$\mathcal{G}_2$

(a) Berechnen Sie die Gewinnregionen W_0 und W_1 in den beiden Spielen.

(b) Sind die Spiele fundiert? Sind sie determiniert?

(c) Zeigen Sie, dass jedes fundierte Spiel determiniert ist.

Aufgabe 3

10 Punkte

Wir betrachten den Körper mit zwei Elementen $\mathfrak{F}_2 := (\{0,1\}, +, \cdot)$ und die Formel

$$\varphi := \forall x (x + x = x \rightarrow \exists y (x + y = y \wedge x \cdot y = x)).$$

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.

(b) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler in $\mathrm{MC}(\mathfrak{F}_2, \varphi)$ an.