Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala

SS 2010

9. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 30.06. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

Sei τ eine relationale Signatur (d.h. τ enthält keine Funktionssymbole), und sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \cdots$ eine *Kette* von τ-Strukturen. Wir definieren eine τ-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$, so dass $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, wie folgt:

$$\begin{aligned} A_\omega &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \\ R^{\mathfrak{A}_\omega} &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^{\mathfrak{A}_n} \quad \text{für alle Relationssymbole } R \in \tau. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Sätze der Form $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_r \exists y_1 \cdots \exists y_s \eta \in \mathrm{FO}(\tau)$ (mit quantorenfreiem η) *unter Vereinigung von Ketten abgeschlossen sind*, d.h. wenn $\mathfrak{A}_n \models \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi$.

(b) Zeigen Sie, dass (a) nicht für beliebige Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt.

(c) Sei $\mathcal{K}$ die Modellklasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element enthalten. Geben Sie ein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ an und zeigen Sie, dass $\mathcal{K}$ kein Axiomensystem aus Sätzen der Form $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_r \exists y_1 \ldots \exists y_s \eta$ (mit quantorenfreiem η) besitzt.

Aufgabe 2 10 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie für die folgenden Relationen jeweils, dass Sie in der jeweiligen Struktur elementar definierbar sind.

(a) die Menge der Primpotenzen und die Addition in $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) die Menge $\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Q}, +)$;

(c) die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ in $(\mathbb{C}, +)$;

(d) alle nicht-trivialen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{Q}$ (d.h. $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{Q}$) in $(\mathbb{Q}, \leq)$.

(e) die Menge $\{0, 1\}$ in $(\{0, 1\}^*, \preceq)$. Dabei bezeichnet $\{0, 1\}^*$ die Menge aller endlichen Wörter über $\{0, 1\}$ und $\preceq$ bezeichnet die Präfix-Relation.

Aufgabe 3 10 Punkte

Welche der folgenden Theorien sind vollständig?

(a) Die Theorie von $(\mathbb{N}, +)$;

(b) die Theorie der Klasse aller τ-Strukturen $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ für eine feste τ-Struktur $\mathfrak{A}$;

(c) die Theorie der Graphen mit 4 Knoten;

(d) die Theorie der linearen Ordnungen mit genau 17 Elementen;

(e) die Theorie der abzählbar unendlichen Cliquen;