

## 10. Übung Mathematische Logik

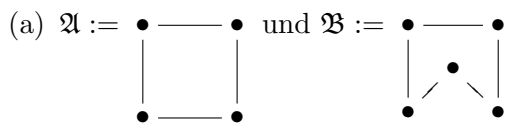
Abgabe: bis Mittwoch, den 07.07. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

### Aufgabe 1

10 Punkte

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$  oder beweisen Sie, dass  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ . Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang  $m$  an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen  $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  und  $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ .



(b)  $\mathfrak{A} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$  und  $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}\{0, 1\}, \subseteq)$  (Potenzmengen von  $\mathbb{N}$  und  $\{0, 1\}$ )

(c)  $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, M, 1)$  und  $\mathfrak{B} := (\mathbb{Q}, M, 1)$ , wobei  $M$  der Graph der Multiplikation ist

(d)  $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$  und  $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ .

### Aufgabe 2

10 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Theorie  $T_{\text{dl}}$  der dichten linearen Ordnungen nicht vollständig ist und dass die Theorie  $T_{\text{dlo}}$  der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte vollständig ist. Geben Sie ferner eine weitere vollständige Erweiterung  $T' \neq T_{\text{dlo}}$  von  $T_{\text{dl}}$  an.

(b) Sei  $\tau = \{P, Q\}$  mit einstelligen Relationssymbolen  $P$  und  $Q$ . Zeigen Sie, dass die Theorie der  $\tau$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$ , in denen  $P^{\mathfrak{A}}$  und  $Q^{\mathfrak{A}}$  unendlich sind und eine Partition des Universums bilden, vollständig ist. Bleibt die Theorie vollständig, auch wenn  $P^{\mathfrak{A}}$  und  $Q^{\mathfrak{A}}$  keine Partition bilden?

### Aufgabe 3

10 Punkte

(a) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei  $\Phi$  eine Menge von FO-Sätzen über einer relationalen Signatur  $\tau$ ,  $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Phi)$  die durch  $\Phi$  axiomatisierte Klasse von Strukturen, und sei  $\mathcal{B}$  eine  $\tau$ -Struktur. Wenn für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein  $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$  existiert mit  $\mathcal{B} \equiv_m \mathcal{A}_m$ , dann gilt  $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ .

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes aus (a), dass die Klasse der Graphen, in denen jeder Knoten nur endlich viele Nachfolger hat, nicht FO-axiomatisierbar ist.

### Aufgabe 4

10 Punkte

Ein Spiel  $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$  kann man als Struktur über der Signatur  $\tau = \{V_0, V_1, E\}$  auffassen: Das Universum ist  $V$ ,  $V_0$  und  $V_1$  sind unäre Relation und  $E$  ist eine binäre Relation. Zeigen Sie, dass keine Formel  $\varphi(x) \in FO(\tau)$  existiert, so dass für jedes Spiel  $\mathcal{G}$  gilt:

$$\mathcal{G} \models \varphi(v) \iff v \text{ ist in der Gewinnregion von Spieler 0.}$$

*Hinweis:* Benutzen Sie, dass transitive Hüllen nicht FO-definierbar sind.