

### Aufgabe 1

Geben Sie (mit Begründung) an, ob die folgenden Formeln Tautologien, erfüllbar oder unerfüllbar sind.

(a)  $((X \wedge Y) \rightarrow Z) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z))$

(b)  $(X \rightarrow (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow Z))$

### Aufgabe 2

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $\{0, \rightarrow\}$  bzw.  $\{1, \rightarrow\}$  funktional vollständig sind.

(b) Sei  $f \in B^3$  die durch  $f(x, y, z) := 1 - \min(x, y, z)$  definierte Boolesche Funktion.

(i) Stellen Sie die Ausdrücke  $f(x, y, z)$  und  $f(x, f(x, y, z), z)$  durch aussagenlogische Formeln dar.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie, dass  $\{f\}$  funktional vollständig ist.

### Aufgabe 3

Jedem ungerichteten Graphen mit Knoten  $1, \dots, n$  ordnen wir eine aussagenlogische Interpretation in folgender Weise zu: Jedem Paar  $i < k$  von Knoten wird eine Variable  $X_{ik}$  zugeordnet, die genau dann den Wert 1 erhält, wenn es eine Kante zwischen  $i$  und  $k$  gibt. Konstruieren Sie für jedes Paar  $n, k$  von natürlichen Zahlen mit  $k < n$  eine Formel  $\varphi_{n,k}$ , die ausdrückt, dass im Graph ein Pfad der Länge  $k$  existiert.