Aufgabe 1

Betrachten Sie folgende Strukturen. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A} \not\equiv_m \mathfrak{B}$ oder beweisen Sie, dass $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Geben Sie im ersten Fall eine Formel vom Quantorenrang m an, welche die Strukturen trennt, sowie Gewinnstrategien für Herausforderer bzw. Duplikatorin in den Spielen $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) $\mathfrak{A}_1 := (\{1, 2, 3, 4\}, <)$;

(ii) $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{N}, <)$;

(iii) $\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$;

(iv) $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, <)$.

Dabei bezeichnet $(\mathbb{N}, <) + (\mathbb{Z}, <)$ die geordnete Summe der Ordnungen $(\mathbb{N}, <)$ und $(\mathbb{Z}, <)$, d.h. diejenige Struktur mit Univserum $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times \{1\})$ und mit $(n, \sigma) < (m, \sigma)$ genau dann, wenn $n < m$ sowie $(n, 0) < (m, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.