Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

2. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 27.04. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Beweisen sie ihre Aussage.

(i) $(X \to Z) \vee (Y \to Z)$

(ii) $(X \to Y) \vee (X \to Z)$

(iii) $\neg(X \to Y) \vee \neg(Y \to Z)$

(iv) $\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$

(b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung auf die folgende Formel an:

$$(1 \to X) \wedge (X \wedge Y \to Z) \wedge (U \to 0) \wedge (Z \wedge Y \to U) \wedge (V \to Y) \wedge (1 \to V)$$

Aufgabe 2 10 Punkte

Wir definieren folgende Ordnung auf aussagenlogischen Interpretationen:

$$\mathfrak{I}_0 \leq \mathfrak{I}_1 \quad :\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}_0(X) \leq \mathfrak{I}_1(X) \quad \text{für alle Variablen } X,$$

wobei $\mathfrak{I}(X) := 0$ gesetzt wird, wenn X nicht im Definitionsbereich von $\mathfrak{I}$ liegt. Ein Modell $\mathfrak{I}$ einer Formel φ heißt *minimal*, wenn es kein Modell $\mathfrak{I}' \models \varphi$ gibt, welche echt kleiner als $\mathfrak{I}$ ist, d. h. $\mathfrak{I}' \leq \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}' \neq \mathfrak{I}$.

(a) Bestimmen Sie alle minimalen Modelle der folgenden Formeln:

(i) $(X \vee Y) \wedge (X \to (Z \vee Y))$

(ii) $(X \wedge Y \to 0) \wedge (Z \wedge X \to Y) \wedge (1 \to X)$

(iii) $(X \wedge Y \to Z) \wedge (1 \to X) \wedge (X \to Z)$

(iv) $(X \to (Y \vee Z)) \wedge (X \vee Y \vee Z)$

(b) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Formeln, in deren DNF jede Konjunktion höchstens ein negiertes Literal enthält. Beweisen Sie, daß jede erfüllbare Formel aus $\mathcal{F}$ genau ein maximales Modell besitzt.

Hinweis. Zeigen Sie, daß, mit $\mathfrak{I}_0$ und $\mathfrak{I}_1$ auch

$$(\mathfrak{I}_0 \sqcup \mathfrak{I}_1)(X) := \max\{\mathfrak{I}_0(X), \mathfrak{I}_1(X)\}$$

ein Modell der Formel ist.

Aufgabe 3 10 Punkte

Seien A und B beliebige Mengen und $E \subseteq A \times B$ eine binäre Relation, so dass

- jedes Element aus A mit endlich vielen Elementen aus B in Relation steht;
- für alle endlichen Teilmengen $A_0 \subseteq A$ es mindestens $|A_0|$ Elemente aus B gibt, welche mit einem der Elemente aus A_0 in Relation stehen.

Zeigen Sie, daß eine injektive Funktion $f : A \to B$ existiert, so dass $(a, f(a)) \in E$ für alle $a \in A$.

Hinweis. Gehen Sie folgendermaßen vor:

(a) Beweisen Sie die Aussage für endliche Mengen A per Induktion über $|A|$.

(b) Formalisieren Sie die Aussage im allgemeinen Fall durch eine Menge von aussagenlogischen Formeln.

(c) Wenden Sie den Kompaktheitssatz an.