Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid

SS 2011

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 04.05. um 13:00 Uhr am Lehrstuhl.

Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(X \lor Z) \land (Y \lor \neg Z \lor X) \land (\neg X \lor Z) \land (\neg Y \lor \neg Z) \land (Y \lor \neg X)\,.$$

(b) Überprüfen Sie mit der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\neg X \land Z) \lor Y \lor (X \land \neg V \land \neg Y) \lor (\neg Z \land \neg Y) \lor (X \land V)\,.$$

(c) Überprüfen Sie die folgende semantische Folgerung anhand der Resolutionsmethode:

$$\{\neg Y \lor X\ , Z \lor Y \lor X \lor \neg U\ , \neg Z \lor Y\ , \neg X \lor V\ , Z \lor X \lor U\} \models X \land V\,.$$

Aufgabe 2 10 Punkte

Eine Ordnung auf einer Menge M ist eine Relation $< \subseteq M \times M$, die irreflexiv ($\forall a \in M\colon a \not< a$) und transitiv ($\forall a, b, c \in M\colon a < b \land b < c \Rightarrow a < c$) ist. Die Ordnung $<$ heißt linear, wenn für alle $a, b \in M$ mit $a \neq b$ entweder $a < b$ oder $b < a$ gilt. Zeigen Sie, dass auf jeder Menge M eine lineare Ordnung $< \subseteq M \times M$ existiert.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für endliche Mengen M per vollständiger Induktion nach der Anzahl der Elemente von M. Für den Fall unendlicher Mengen M definieren Sie eine Menge aussagenlogischer Formeln, mit Variablen X_{ab} für $a, b \in M$, deren Modelle gerade den linearen Ordnungen auf M entsprechen. Wenden Sie dann den Kompaktheitssatz an.

Aufgabe 3 10+5* Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionskalküls heißt P-Resolution: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Eine Klausel heißt positiv, falls sie nur positive Literale enthält. Zeigen Sie:

(a) Jede Klauselmenge ohne positive Klauseln ist erfüllbar.

(b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{\neg Z, Y\}, \{V, X, Z\}, \{\neg X, V\}, \{\neg V, Y\}, \{\neg Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) P-Resolution ist korrekt, das heißt wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d*) P-Resolution ist vollständig, das heißt wenn eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, dann lässt sich $\Box$ aus K durch P-Resolution ableiten.
Hinweis: Führen Sie den Beweis per Induktion über die Anzahl der in K vorkommenden Aussagenvariablen. Betrachten Sie dabei die Verteilung der Klauseln auf Mengen A, B und C dementsprechend, ob eine Klausel eine gegebene Variable positiv, negativ, beziehungsweise gar nicht enthält.

Aufgabe 4 10 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig?

(a) $(X \vee Y),\ (X \rightarrow (Y \wedge Z)) \ \Rightarrow\ Y,\ \neg Z;$

(b) $(X \rightarrow Z),\ (Y \rightarrow Z) \ \Rightarrow\ X,\ Y,\ \neg Z.$

Überprüfen Sie durch geeignete Anwendung der Resolutionsmethode, ob folgende Sequenz gültig ist:

(c) $((\neg X \wedge Y) \rightarrow \neg Z),\ (Y \rightarrow Z) \ \Rightarrow\ (\neg X \vee \neg Y) \rightarrow Z.$